

Aufbau eines Experimentes zur Überlagerung zweier gegenläufiger intensiver Laserpulse

Diplomarbeit

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE FAKULTÄT



eingereicht von **Jens Bernhardt**
geboren den 06.01.1979 in Monrovia (Liberia)

1. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. R. Sauerbrey

2. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. A. Tünnermann

Tag der Verleihung des Diploms:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Theoretische Grundlagen	8
2.1	Freies Elektron im intensiven Laserfeld	8
2.1.1	Klassische Bewegung	9
2.1.2	Relativistische Bewegung	11
2.2	Relativistische Autokorrelation	22
2.2.1	Überlagerung gegenläufiger Laserpulse	23
2.2.2	Abstrahlung der zweiten Harmonischen	32
2.2.3	Räumlich gemittelttes Autokorrelationssignal	37
2.3	Laser-Plasma	38
2.3.1	Selbstfokussierung	40
2.3.2	Gasdichtemessungen	51
2.3.3	Lasergetriebene Plasmawelle	53
3	Experimenteller Aufbau	57
3.1	Lasersystem	57
3.1.1	Faraday-Isolator	61
3.2	Meßanordnung	65
4	Experimentelle Resultate	73
4.1	Eigenschaften der fokussierten Laserpulse	73
4.2	Dichteprofil des Gasstrahls	82
4.3	Räumlicher und zeitlicher Überlapp	83
4.4	Einzelschuß-Autokorrelation bei relativistischer Laserintensität	108
5	Zusammenfassung	115
6	Ausblick	116

Literaturverzeichnis	123
7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen	130
7.1 Freies Elektron in einer ebenen Welle	130
7.1.1 Klassische Betrachtung	130
7.1.2 Relativistische Betrachtung	132
7.2 Freies Elektron in einer stehenden Welle	141
7.3 Klassische Plasma-Dispersionsrelation	145
7.4 Ponderomotorische Selbstfokussierung	148
7.5 Relativistische Selbstfokussierung	153
7.6 Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen	155
7.7 Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse	164
7.8 Pulsfrontverkipfung eines Gauß'schen Pulses	170
7.9 Klassische Autokorrelation zweiter Ordnung	172
7.10 Klassische Autokorrelation dritter Ordnung	174
7.11 $q_{1/e}$ -Parameter eines idealen Gauß'schen Pulses	175
7.12 Relativistische Autokorrelation	177
7.13 Laser Wake-Field	185
7.13.1 Laser-Plasma-Welle	185
7.13.2 Approximation	189
7.13.3 Numerische Lösung	190
7.14 Relativistische Bewegungsgleichungen	193
7.15 Lösung der paraxialen Wellengleichung	194
7.16 Lösung der parabolischen Wellengleichung	197

1 Einleitung

Zur Zeit gibt es auf der Welt einige wenige Lasersysteme - u. a. auch das JETI-Lasersystem (Abk. : *Jenaer 10 Hz-Titan:Saphir-Lasersystem*, *Institut für Optik und Quantenelektronik Jena*) -, welche auf einem Labortisch Platz finden (engl. "table top laser"), und Laserpulse mit einer Pulsdauer von $\tau_L \lesssim 100$ fs und einer Energie von $E_L \sim 1$ J liefern. Dies entspricht einer Leistung von $P_L = E_L/\tau_L \sim 10$ TW. Laserpulse mit ultrakurzer Pulsdauer lassen sich mittels spektral breitbandiger Materialien wie Titan:Saphir verwirklichen; ihre Verstärkung beruht auf der sog. CPA-Technik¹ (engl. : "chirped pulse amplification technique") [1]. Bei der Fokussierung auf einen winzigen Brennfleck von $A_F \sim 10 \mu\text{m}^2$ ergibt sich eine Laserintensität von $I_L \sim 10^{19}$ W/cm². Wechselwirkt ein intensiver Laserpuls mit Materie, so entsteht ein Laserplasma. Ab Laserintensitäten von $I_{\text{rel}} \sim 10^{18}$ W/cm² oszillieren die Plasmaelektronen nicht mehr klassisch, sondern bewegen sich auf relativistischen Bahnen - dies ist das Gebiet der relativistischen Laser-Plasma-Physik. Unter bestimmten Bedingungen bildet sich während der Wechselwirkung eines intensiven Laserpulses mit einem lasererzeugten Plasma ein Plasmakanal, in welchem das Laserlicht über mehrere Rayleighlängen hinaus fokussiert bleibt. In solch einem Plasmakanal können Elektronen innerhalb weniger hundert Mikrometer auf relativistische Energien ($E_{\text{kin}} > m_e c^2 = 512$ keV) beschleunigt werden [2]. Treffen diese laserbeschleunigten Elektronen auf ein (Konverter-)Material mit hoher Kernladungszahl, so entsteht Bremsstrahlung, welche wiederum zur Erzeugung photoinduzierter Kernreaktionen [3, 4] bzw. -umwandlungen genutzt werden kann [5, 6]. Erst kürzlich ist es weltweit einigen Forschergruppen gelungen, lasererzeugte, stark gerichtete und quasi-monoenergetische Elektronenstrahlen mit hoher Ladungsdichte, hoher Energie und geringer Emittanz zu erzeugen [7, 8, 9]. Weitere Arbeiten zeigen, daß Laserplasmen reiche Teilchen- [10, 11] und Photonenquellen [12, 13] darstellen, welche sich durch hohe Energie, hohen Teilchen- bzw. Photonenfluß, kleine Divergenz, kleine Quellgröße und ultrakurze Bündel- bzw. Pulsdauer auszeichnen. Aufgrund ihrer besonderen Eigenschaften sind sie für die Untersuchung schneller biologischer und chemischer Reaktionen, die

¹CPA-Technik: Um die Intensitäten klein zu halten und somit unterhalb der Zerstörschwellen der Optiken zu bleiben, werden die Laserpulse zunächst in der Zeit gestreckt, anschließend verstärkt und schließlich wieder verkürzt.

1 Einleitung

Entwicklung neuer Lithographieverfahren auf der Basis ultrakurzer Wellenlängen in der Computer- und Chipindustrie, die Gamma-, Neutronen- und Protonenradiographie sowie die Hochenergiephysik von besonderem Interesse. Laserplasmen sind - gleichsam als Teilchenbeschleuniger im Mikrometerbereich - gegenüber großen, oft kilometerlangen Beschleunigeranlagen kostengünstiger, einfacher zu handhaben und sicherer.

Die vorliegende Diplomarbeit beschreibt den Aufbau eines neuen Experimentes zur Überlagerung zweier gegenläufiger hochintensiver Laserpulse ("Zweistrahlexperiment"). Die wesentliche Aufgabe besteht darin, eine Meßanordnung zu entwickeln, die es erlaubt, einen Laserpuls mit relativistischer Intensität² in zwei Teilstrahlen gleicher Energie aufzuspalten und diese aus entgegengesetzten Richtungen aufeinander zulaufen zu lassen, so daß sie sich gleichzeitig in ihrem gemeinsamen Fokus treffen (s. Abb. 1.1). Die angestrebte Genauigkeit des zeitlichen bzw. räumlichen Überlapps liegt dabei im Femtosekunden- bzw. Mikrometerbereich! Zur Realisierung dieser Aufgabe wird der Hauptpuls des Lasersystems ($I_L \gtrsim I_{\text{rel}}$) durch einen Strahlteiler in zwei Teilstrahlen aufgespalten und mittels zweier Parabolspiegel unter einem Winkel von 180° in einen Helium-Gasstrahl fokussiert. Aufgrund der hohen Laserintensität entsteht ein Laserplasma, welches nicht nur die Fundamentale, sondern auch höhere Harmonische der Laserfrequenz abstrahlt (sog. *Nichtlineare Thomsonstreuung*) [14, 15]. Um die beiden Teilstrahlen räumlich und zeitlich zu überlagern, wird die zweite Harmonische der Laserfrequenz (2ω -Selbstemission des Plasmas) gemessen, und zur Beobachtung der Pulsausbreitung werden zeitaufgelöste Schattenbilder des Plasmas aufgenommen. Dazu wird ein frequenzverdoppelten Abtast(Probe-)puls genutzt, dessen zeitliche Verzögerung bzgl. des Hauptpulses veränderlich einstellbar ist. Treffen sich die gegenläufigen (identischen) Teilstrahlen, welche jeweils relativistische Intensität besitzen ($I_{1/2} \gtrsim I_{\text{rel}}$), schließlich mit hoher Genauigkeit in Raum und Zeit, so sind sie (auto-)korreliert.

Aus der relativistischen Autokorrelation - relativistisch, da die beteiligten Laserintensitäten relativistisch sind - läßt sich die Pulsdauer bestimmen. Klassische, konventionelle Autokorrelationstechniken [16] beruhen auf der Verwendung nichtlinearer optischer Kristalle wie BBO, KDP oder LBO (β -BaB₂O₄, KH₂PO₄ oder LiB₃O₅); sie können nicht bei relativistischer Laserintensität verwendet werden, da die Kristalle zerstört würden. Üblicherweise wird die Pulsdauer zunächst aus einer klassischen Autokorrelationsmessung bestimmt und für den relativistischen Bereich übernommen. Die relativistische Autokorrelationsmessung hingegen erlaubt es, die Pulsdauer bei voller Laserintensität

²Die relativistische Intensität ist diejenige Intensität I_L , die benötigt wird, um freie Elektronen auf relativistische Energien zu beschleunigen ($I_L \gtrsim I_{\text{rel}} = 2.2 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$ bei einer Laserwellenlänge von 795 nm).

1 Einleitung

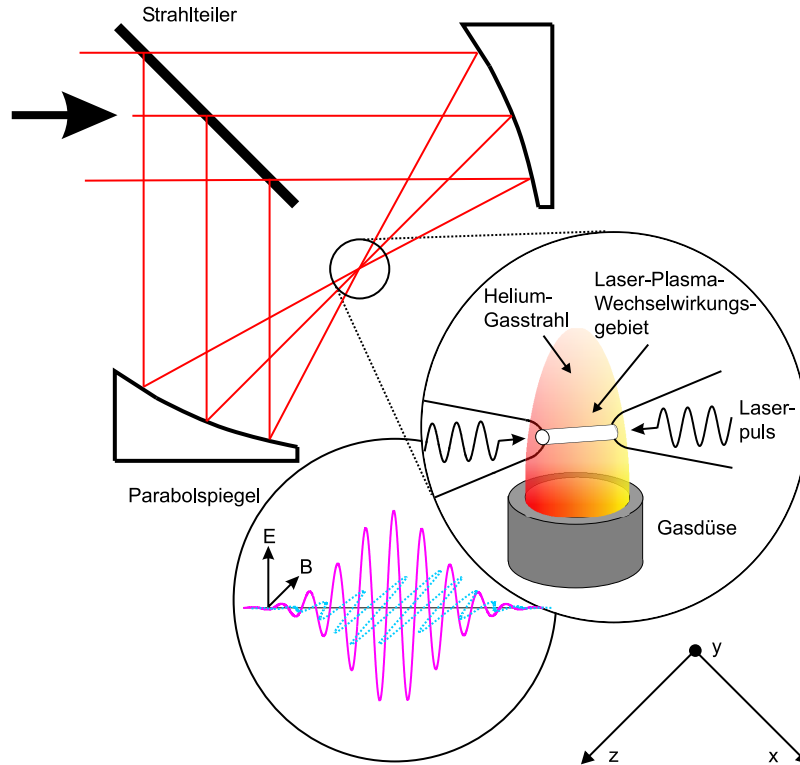


Abbildung 1.1: Zweistrahlexperiment. Ein intensiver Laserpuls (schwarzer dicker Pfeil) wird durch einen Strahlteiler in zwei Teilstrahlen aufgespalten und mittels zweier Parabolspiegel unter einem Winkel von 180° in einen Helium-Gasstrahl fokussiert (vergrößerter Ausschnitt). Dadurch entsteht ein Plasma, in welchem sich die beiden gegenläufigen Teilstrahlen zu einer stehenden Welle überlagern (Kreis links unten, \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder).

unmittelbar in der Gegend der Laser-Plasma-Wechselwirkung zu ermitteln [17]. Sie liefert somit einen direkten Zugang zu einem der wichtigsten Parameter der relativistischen Laser-Plasma-Physik - der Pulsdauer.

Mit dem Aufbau, der Erfahrung und dem Wissen aus dem Zweistrahlexperiment lassen sich in Zukunft möglicherweise interessante Experimente durchführen (s. Kap. 5): "Compton-Rückstreuung an laserbeschleunigten Elektronen", "laserbeschleunigte Elektron-Elektron-Kollision" und "Multiphotonenionisation des Vakuums" bzw. "Elektron-Positron-Paarbildung aus dem Vakuum".

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel wird die relativistische Bewegung eines freien Elektrons in einem intensiven Laserfeld diskutiert (s. Kap. 2.1) und die daraus resultierende Abstrahlung der zweiten Harmonischen berechnet (s. Kap. 2.2.2). Dabei wird die räumliche und zeitliche Überlagerung zweier gegenläufiger intensiver Laserpulse berücksichtigt (s. Kap. 2.2.1). Die Abstrahlung und Detektion der zweiten Harmonischen wird als relativistische Autokorrelation gedeutet (s. Kap. 2.2). Weiterhin werden zwei Effekte betrachtet, die i. a. während der Wechselwirkung eines Laserpulses mit einem Plasma stattfinden: die Selbstfokussierung eines Laserpulses in einem Plasma (s. Kap. 2.3.1) und die Erzeugung einer lasergetriebenen Plasmawelle (s. Kap. 2.3.3), in welcher Elektronen beschleunigt werden können. Schließlich wird die Phasenverschiebung berechnet, welche ein Laserpuls bei seinem Wege durch ein Laserplasma aufammelt; dies ist wichtig für das Verständnis der durchgeführten Messungen zur Gas- bzw. Elektronendichte (s. Kap. 2.3.2).

Die Arbeit ist durchweg im SI-System (franz. : "système international d'unités") geschrieben, und die Raumrichtungen werden wie folgt bezeichnet:

- x ist die Polarisationsrichtung des Lasers (im Falle linear polarisierten Lichtes)
- z ist die Ausbreitungsrichtung des Lasers
- y steht senkrecht auf der x - und der z -Achse (x , y und z bilden ein rechtshändiges Koordinatensystem).

Die in diesem Kapitel dargestellten Bilder beruhen stets auf den Parameter aus den experimentellen Messungen (s. Kap. 4).

2.1 Freies Elektron im intensiven Laserfeld

Zunächst werden die klassische und die relativistische Bewegung eines freien Elektrons in einem intensiven Laserfeld behandelt. Dazu wird das Laserfeld als *ebene*, kontinuierliche elektromagnetische Welle, die sich im Vakuum ausbreitet, beschrieben. Bei einer ebenen Welle setzt man voraus, daß der Strahldurchmesser transversal zur optischen Achse

2 Theoretische Grundlagen

unendlich groß ist, und daß das transversale Intensitätsprofil, d. h. das Profil in der x, y -Ebene, konstant ist. Weiterhin ist eine ebene Welle in Richtung der optischen Achse unendlich weit ausgedehnt. Eine kontinuierliche cw-Welle (engl. : "continuous wave") zeichnet sich dadurch aus, daß sie von unendlicher Zeitdauer ist.

Die obigen Bedingungen sind in den Experimenten nicht erfüllt. Es wird dennoch zunächst der einfachste Ansatz einer ebenen Welle verwendet, um so viel wie möglich analytisch rechnen zu können. Später werden außerdem der endliche Strahldurchmesser und das transversale Intensitätsprofil realer Laserpulse berücksichtigt und die kontinuierliche Welle durch Laserpulse von endlicher Zeitdauer ersetzt.

2.1.1 Klassische Bewegung

Für das Vektorpotential einer ebenen Welle, die in x -Richtung linear polarisiert ist und sich in positive z -Richtung ausbreitet, gilt¹

$$\mathbf{A}^+ = A_0 \sin \phi^+ \hat{\mathbf{e}}_x, \quad (2.1)$$

wobei $\phi^+ = (\omega_0 t - k_0 z)$ die Phase, A_0 die Amplitude des Vektorpotentials, $\omega_0/2\pi$ die Mittenfrequenz, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ die Wellenzahl und λ_0 die Mittenwellenlänge des Lasers sind. Über die homogenen Maxwellgleichungen [18]

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi_{\text{elek}} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.3)$$

erhält man für verschwindendes elektrostatisches Potential ($\nabla \Phi_{\text{elek}} \doteq 0$) die elektrischen und magnetischen Felder

$$\mathbf{E}^+ = E_0 \cos \phi^+ \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.4)$$

$$\mathbf{B}^+ = B_0 \cos \phi^+ \hat{\mathbf{e}}_y. \quad (2.5)$$

Aus der Dispersionsrelation im Vakuum ($\omega_0 = ck_0$) folgt die Verknüpfung der Amplituden $B_0 = E_0/c$. Auf ein freies Elektron wirkt i. a. die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.6)$$

¹Alle Feldgrößen $\psi(\mathbf{r}, t)$ sind Funktionen von Raum und Zeit. Im folgenden wird kürzer ψ anstatt $\psi(\mathbf{r}, t)$ geschrieben. Der positive bzw. negative Index an den Größen ψ^\pm, ϕ^\pm steht für positive bzw. negative Ausbreitungsrichtung.

2 Theoretische Grundlagen

wobei e die Elementarladung und \mathbf{v} die Geschwindigkeit des Elektrons sind. Da für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c \Rightarrow v/c \ll 1$ der Einfluß des Magnetfeldes vernachlässigt werden kann, erfährt das Elektron nur die elektrische Kraft $\mathbf{F}_{\text{kl}} = -e\mathbf{E}$. In diesem Fall läßt sich die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{kl}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{el}}, \quad (2.7)$$

wobei $\mathbf{p}_{\text{kl}} = m_e \mathbf{v}$ der klassische Impuls ist, direkt zeitlich integrieren. Mit der Anfangsbedingung $\mathbf{v}_{\text{kl}}(\phi^+ = 0) \doteq 0$ erhält man die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{kl}} = -\frac{eE_0}{m_e\omega_0} \sin \phi^+ \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.8)$$

Nach weiterer zeitlicher Integration mit der Anfangsbedingung $\mathbf{r}_{\text{kl}}(\phi^+ = 0) \doteq 0$ ergibt sich für die Auslenkung des Elektrons

$$\mathbf{r}_{\text{kl}} = \frac{eE_0}{m_e\omega_0^2} (\cos \phi^+ - 1) \hat{\mathbf{e}}_x. \quad (2.9)$$

Das Elektron oszilliert in x -Richtung; sowohl seine Oszillationsgeschwindigkeit als auch seine Auslenkungsamplitude sind proportional zur elektrischen Feldstärke. Die Laserintensität ist über den Betrag des Poyntingvektors (\mathbf{S}) im Vakuum definiert, dabei wird das über eine Laserperiode $T = 2\pi/\omega_0$ zeitliche Mittel gebildet² [18]

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \rangle = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}, \quad (2.10)$$

wobei E_0 die elektrische Feldstärke, c die Vakuumlichtgeschwindigkeit, μ_0 die Permeabilitäts- und ε_0 die Dielektrizitätskonstante sind. Die Intensität ist proportional zum Quadrat der elektrischen Feldstärke ($I \sim E_0^2$). Für die zeitlich gemittelte, klassische Oszillationsenergie ergibt sich schließlich

$$\langle U_{\text{osz}} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p}_{\text{kl}}^2}{2m_e} \right\rangle = \frac{e^2}{8m_e\varepsilon_0\pi^2 c^3} I \lambda_0^2, \quad (2.11)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit, m_e die Elektronenmasse, ε_0 die Dielektrizitätskonstante, I die Intensität und λ_0 die Mittenwellenlänge des Lasers sind. Setzt man die Werte $I = 10^{19} \text{ W/cm}^2$ und $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ ein, so ergibt sich

$$\langle U_{\text{osz}} \rangle \approx 600 \text{ keV} > 511 \text{ keV}. \quad (2.12)$$

² $\langle \dots \rangle$ bezeichnet im folgenden das zeitliche Mittel.

2 Theoretische Grundlagen

D. h. Ab Laserintensitäten von $I \gtrsim 10^{18} \text{ W/cm}^2$ (vgl. atomare Intensität: $I_{\text{at}} \approx 4 \times 10^{16} \text{ W/cm}^2$; folgt aus der atomaren Feldstärke $E_{\text{at}} = e/4\pi\epsilon_0 a_{\text{B}}^2$ mit Bohr'schem Radius $a_{\text{B}} = 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$) ist die zeitlich gemittelte, klassische Oszillationsenergie in der Größenordnung der Ruheenergie des Elektrons. In diesem Fall ist die klassische Beschreibung nicht mehr gültig.

2.1.2 Relativistische Bewegung

Mit zunehmender Feldstärke bzw. Intensität des Laserfeldes schwingt das Elektron immer schneller in x -Richtung, bis die magnetische Kraft $\mathbf{F}_{\text{m}} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ nicht mehr vernachlässigbar ist. Zu Beginn schwingt das Elektron in x -Richtung. Da das Magnetfeld in y -Richtung zeigt, wirkt die magnetische Kraft in z -Richtung. Das Elektron gewinnt seine Leistung $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ bzw. kinetische Energie $E_{\text{kin}} = P\Delta t$, wobei Δt ein beliebiges Zeitintervall ist, nur aus der elektrischen und nicht aus der magnetischen Kraft

$$\mathbf{F}_{\text{m}} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{F}_{\text{m}} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow P_{\text{m}} = 0, E_{\text{kin}, \text{m}} = 0. \quad (2.13)$$

Die magnetische Kraft bewirkt lediglich eine Richtungsänderung des Elektrons. Die vollständige Bahnkurve des Elektrons erhält man, indem man die relativistischen Bewegungsgleichungen löst. Als Ansatz dient eine laufende und eine stehende Welle.

In der laufenden Welle ergeben sich analytische Lösungen, sowohl im Laborsystem als auch in einem lorentztransformierten System, in welchem der zeitlich gemittelte Impuls in z -Richtung verschwindet. In der stehenden Welle, die in erster Näherung als Überlagerung zweier gegenläufiger laufender Wellen geschrieben werden kann, lassen sich die relativistischen Bewegungsgleichungen numerisch lösen.

Relativistische Bewegungsgleichungen

Für die relativistische Bewegung eines freien Elektrons, welches sich in intensiven elektrischen und magnetischen Laserfeldern befindet, gilt allgemein

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_e \mathbf{v}) = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.14)$$

wobei $\mathbf{p} = \gamma m_e \mathbf{v}$ der relativistische Impuls, γ der Lorentzfaktor, m_e die Ruhemasse und e die Elementarladung des Elektrons sind. Der Lorentzfaktor lautet

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \sqrt{1 + (\mathbf{p}/m_e c)^2}. \quad (2.15)$$

2 Theoretische Grundlagen

Verwendet man die Operatorbeziehung $d\mathbf{p}^2 = 2\mathbf{p}d\mathbf{p}$ und berücksichtigt zusätzlich, daß der relativistische Impuls parallel zur Geschwindigkeit ist, d. h.

$$\mathbf{p} \parallel \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.16)$$

so ergibt sich für die zeitliche Änderung der kinetischen Energie bzw. die Leistungsbilanz (s. Anh. 7.14),

$$\frac{d}{dt}E_{\text{kin}} = m_e c^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.17)$$

Laufende Welle

Setzt man die Felder der laufende Welle in die relativistischen Bewegungsgleichungen (2.14 und 2.17) ein, so erhält man ein gekoppeltes *implizites* System gewöhnlicher Differentialgleichungen (s. Anh. 7.2)

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = a_0 \omega_0 \cos \phi^+ \left(\frac{v_z}{c} - 1 \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{d\tilde{p}_y}{dt} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{d\tilde{p}_z}{dt} = -a_0 \frac{\omega_0}{c} v_x \cos \phi^+ \quad (2.20)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -a_0 \frac{\omega_0}{c} v_x \cos \phi^+, \quad (2.21)$$

wobei $a_0 = eE_0/m_e\omega_0 c$ der sog. relativistische Parameter und $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/m_e c$ der normierte Impuls sind. Der relativistische Parameter ist definiert als das Verhältnis von klassischem Impuls (\mathbf{p}_{kl}) zu $p_0 = m_e c$ und gibt den Feldstärke- bzw. Intensitätsbereich der Laser-Materie-Wechselwirkung an (s. Anh. 7.1)

$$a_0 = \frac{\max(|\mathbf{p}_{\text{kl}}|)}{p_0} = \frac{e\lambda_0}{m_e\sqrt{2\pi}c^{5/2}} \sqrt{\frac{I}{\varepsilon_0}}. \quad (2.22)$$

Der Fall $a_0 \ll 1$ gibt den klassischen Bereich an. Für $a_0 \approx 1$ erreicht das Elektron bereits innerhalb einer halben Laserperiode die Lichtgeschwindigkeit. Ab $a_0 \gtrsim 1$ ist eine relativistische Betrachtung erforderlich. Der Fall $a_0 = 1$ entspricht bei einer Laserwellenlänge von 795 nm einer Laserintensität von $I_{\text{rel}} \approx 2.2 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$ bzw. einer elektrischen Feldstärke von $E_{\text{rel}} = 4 \times 10^{12} \text{ V/m}$.³

³Der Lorentzfaktor läßt näherungsweise schreiben als: $\gamma \approx \sqrt{1 + I\lambda_0^2/1.37 \cdot 10^{18} \text{ W}\mu\text{m}^2/\text{cm}^2}$. Bei einer Laserintensität von $I > 2.2 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$ ergibt sich für eine Mittenwellenlänge des Lasers von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ der Lorentzfaktor $\gamma > 1$.

2 Theoretische Grundlagen

Integriert man die relativistischen Bewegungsgleichungen zeitlich mit der Anfangsbedingung, daß das Elektron bei maximaler Feldstärke ruht, d. h. $\tilde{\mathbf{p}}(\phi^+ = 0) = 0$ und $\gamma(\phi^+ = 0) = 1$, so findet man die relativistischen Impulse (s. Anh. 7.1)

$$p_x = -a_0 m_e c \sin \phi^+ \quad (2.23)$$

$$p_z = \frac{1}{2} a_0^2 m_e c \sin^2 \phi^+ \quad (2.24)$$

und den Lorentzfaktor (s. Anh. 7.1)

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} a_0^2 \sin^2 \phi^+. \quad (2.25)$$

Die kinetische Energie (E_{kin}), die das Elektron im Laserfeld aufnimmt, lautet

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= (\gamma - 1) m_e c^2 \\ &= \frac{1}{2} a_0^2 \sin^2 \phi^+ m_e c^2 = p_z c. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sie skaliert mit dem Quadrat der Laserintensität und der Ruhenenergie des Elektrons

$$E_{\text{kin}} \sim a_0^2 m_e c^2 \sim I^2 E_{\text{Ruhe}}. \quad (2.27)$$

Über $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\gamma m_e$ berechnet man die Geschwindigkeiten, (s. Abb. 2.1, s. Anh. 7.1)

$$v_x = -\frac{2a_0 c \sin \phi^+}{2 + a_0^2 \sin^2 \phi^+} \quad (2.28)$$

$$v_z = \frac{a_0^2 c \sin^2 \phi^+}{2 + a_0^2 \sin^2 \phi^+}. \quad (2.29)$$

Für die Geschwindigkeiten gelten die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_x = 0 \quad (2.30)$$

$$\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_z = c. \quad (2.31)$$

D. h. Das Elektron oszilliert bei sehr hohen Laserintensitäten nicht mehr in x -Richtung, sondern bewegt sich nur noch mit der Lichtgeschwindigkeit in z -Richtung! Integriert man die Geschwindigkeiten zeitlich, so ergibt sich die parametrische Bahnkurve des Elektrons

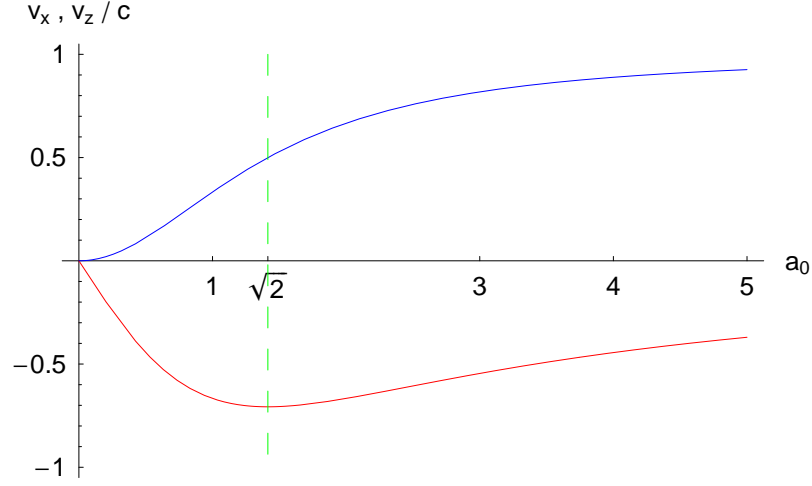


Abbildung 2.1: Geschwindigkeit eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, Laborsystem). Die Geschwindigkeiten des Elektrons in Polarisations- (rot) und in Ausbreitungsrichtung (blau) des Lasers sind gegen den relativistischen Parameter a_0 , der ein Maß für die Laserintensität ist, aufgetragen. Die Phase beträgt $\phi^+ = \pi/2$. Für hohe Laserintensitäten geht die Geschwindigkeit in Polarisationsrichtung gegen Null, während die Geschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung des Lasers gegen die Lichtgeschwindigkeit geht. Die Beschleunigung des Elektrons in Polarisationsrichtung des Lasers, d. h. $a_x = dv_x/dt$ verschwindet für $a_0 = \sqrt{2}$.

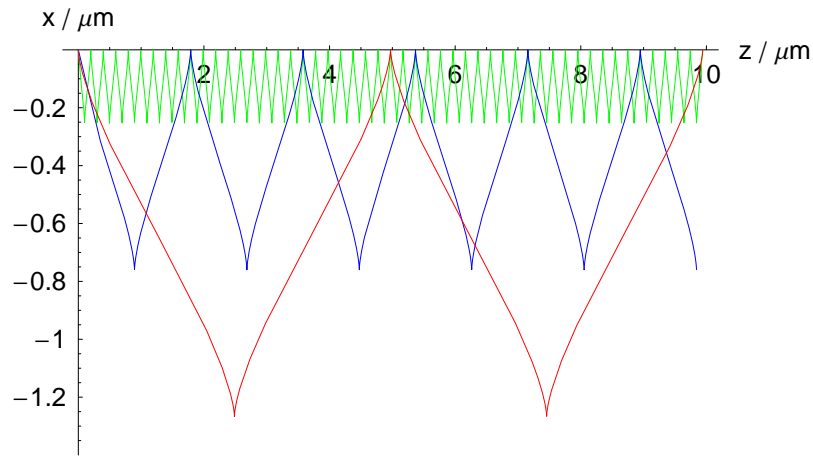


Abbildung 2.2: Relativistische Bahnkurve eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, Laborsystem). Die parametrischen Trajektorien sind für den gerade relativistischen Fall $a_0 = 1$ (grün) und die stark relativistischen Fälle $a_0 = 3$ (blau) sowie $a_0 = 5$ (rot) aufgetragen. Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$. Mit steigender Laserintensität vergrößert sich sowohl die Oszillationsamplitude als auch die Strecke, die das Elektron während einer Laserperiode in Ausbreitungsrichtung des Lasers zurücklegt.

2 Theoretische Grundlagen

(s. Abb. 2.2, s. Anh. 7.1)

$$x = a_0 \frac{c}{\omega_0} (\cos \phi^+ - 1) \quad (2.32)$$

$$z = \frac{1}{2} a_0^2 \frac{c}{\omega_0} \left[\frac{\phi^+}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\phi^+) \right]. \quad (2.33)$$

Das Elektron oszilliert in x -Richtung, infolge des magnetischen Anteils der Lorentzkraft $\mathbf{F}_m \sim \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ fliegt es gleichzeitig in z -Richtung. Im Laborsystem bewegt es sich daher entlang einer charakteristischen Zickzack-Kurve. Die Oszillationsamplitude ist proportional zur Laserintensität ($x \sim a_0$), während die Strecke, die das Elektron während einer Laserperiode in z -Richtung zurücklegt, proportional zum Quadrat der Laserintensität ist ($z \sim a_0^2$).

Für eine Lorentztransformation des Impulses, bei der sich das System \sum' gegenüber dem System \sum mit einer konstanten Geschwindigkeit v_z bewegt, gilt allgemein [19]

$$p'_x = p_x, p'_y = p_y, p'_z = \gamma_{v_z} (p_z - \gamma m_e v_z), \quad (2.34)$$

wobei $\gamma_{v_z} = 1/\sqrt{1 - (v_z/c)^2}$ der zur Geschwindigkeit v_z gehörige *konstante* Lorentzfaktor ist. Transformiert man so, daß der mittlere Impuls in z -Richtung verschwindet, d. h. $\langle p'_z \rangle = 0$, so erhält man die konstante Driftgeschwindigkeit und den Lorentzfaktor des Elektrons (s. Anh. 7.1)

$$v_z = \frac{a_0^2 c}{4 + a_0^2} \quad (2.35)$$

$$\gamma_{v_z} = \frac{4 + a_0^2}{\sqrt{16 + 8a_0^2}}. \quad (2.36)$$

Wegen $\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_z = c$ strebt diese Geschwindigkeit für hohe Laserintensitäten gegen die Lichtgeschwindigkeit. Aus der Transformation des Impulses (2.34) folgt (s. Anh. 7.1)

$$p'_x = -a_0 m_e c \sin \phi^+ \quad (2.37)$$

$$p'_z = -\frac{a_0^2 m_e c \cos(2\phi^+)}{\sqrt{16 + 8a_0^2}}. \quad (2.38)$$

D. h. Das Elektron schwingt doppelt so schnell in z' -Richtung ($p'_z \sim \cos 2\phi^+$) wie in x' -Richtung ($p'_x \sim \sin \phi^+$). Zeitliche Integration liefert die parametrische Bahnkurve im transformierten System (s. Anh. 7.1, s. Abb. 2.3)

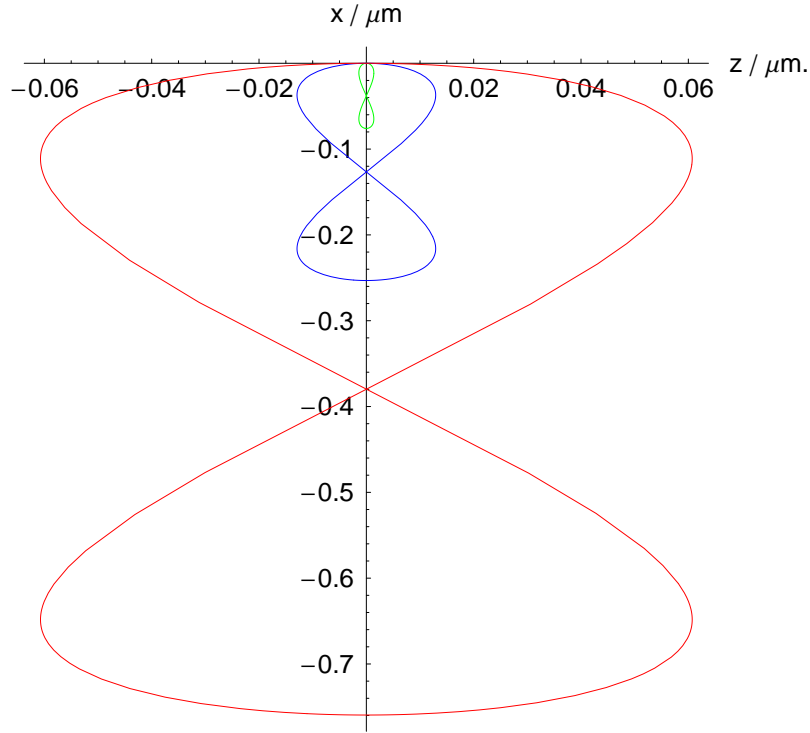


Abbildung 2.3: Relativistische Bahnkurve eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, lorentztransformiertes System, in dem der mittlere Impuls in Ausbreitungsrichtung des Lasers verschwindet). Die parametrischen Trajektorien sind für den schwach relativistischen Fall $a_0 = 0.3$ (grün), den gerade relativistischen Fall $a_0 = 1$ (blau) sowie den stark relativistischen Fall $a_0 = 3$ (rot) aufgetragen. Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, und die Phase ϕ^+ läuft von $0 \dots 2\pi$. Das Elektron bewegt sich entlang einer charakteristischen Achterbahn. Es schwingt doppelt so schnell in Ausbreitungs- wie in Polarisationsrichtung des Lasers. Dies führt zur Abstrahlung der in Polarisationsrichtung linear polarisierten Fundamentale und der in Ausbreitungsrichtung des Lasers linear polarisierten zweiten Harmonischen. Die Abstrahlung höherer Harmonischer wird im Gegensatz zur klassischen, linearen Thomsonstreuung, bei der das Elektron lediglich in Polarisationsrichtung schwingt und nur die Fundamentale der Laserfrequenz emittiert, nichtlineare Thomsonstreuung genannt.

2 Theoretische Grundlagen

$$x' = a_0 \frac{c}{\omega_0} (\cos \phi^+ - 1) \quad (2.39)$$

$$z' = -\frac{1}{2} a_0^2 \frac{c}{\omega_0} \frac{\sin(2\phi^+)}{\sqrt{16 + 8a_0^2}}. \quad (2.40)$$

Das Elektron bewegt sich entlang einer charakteristischen Achterbahn (s. Lit. [20]).

Man kann sich die Achterbahn als Überlagerung zweier unabhängig schwingender Hertz'scher Dipole vorstellen: Ein Hertz'scher Dipol emittiert ganz allgemein Strahlung, deren Intensität unter einem Winkel von 90° zur Dipolachse maximal ist; parallel dazu verschwindet sie [21, 18, 22]. Die emittierte Strahlung ist in Schwingungsrichtung des Dipols linear polarisiert. Der erste Dipol oszilliert mit der Laserfrequenz in x -Richtung ($x' \sim \cos \omega_0 t$), während der zweite mit der doppelten Laserfrequenz in z -Richtung oszilliert ($z' \sim \sin 2\omega_0 t$). Dies führt zur Abstrahlung einer in x -Richtung linear polarisierten Fundamentalen und einer in z -Richtung linear polarisierten zweiten Harmonischen. Die Abstrahlung höherer Harmonischer heißt nichtlineare Thomsonstreuung [15, 14]. Bei der klassischen, linearen Thomsonstreuung schwingt das Elektron hingegen lediglich mit der Laserfrequenz in x -Richtung ($x_{kl} \sim \sin 2\omega_0 t$) und strahlt nur die Fundamentele der Laserfrequenz ab [18].

Es soll noch auf eine wichtige Tatsache hingewiesen werden: In einem Laserpuls, der von endlicher Dauer ist, kann ein Elektron, daß zu Beginn in Ruhe ist, *keine* kinetische Nettoenergie aufnehmen [23].

Stehende Welle

Überlagert man die elektrischen und magnetischen Felder einer nach links und einer nach rechts laufenden ebenen Welle⁴

$$\mathbf{E}^\pm = E_0 \cos \phi^\pm \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.41)$$

$$\mathbf{B}^\pm = B_0 \cos \phi^\pm \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (2.42)$$

wobei $\phi^\pm = \omega_0 t \mp k_0 z$ die jeweiligen Phasen sind, so erhält man eine ebene stehende Welle

$$\mathbf{E}_{\text{st}} = 2E_0 \cos(\omega_0 t) \cos(k_0 z) \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.43)$$

$$\mathbf{B}_{\text{st}} = 2B_0 \sin(\omega_0 t) \sin(k_0 z) \hat{\mathbf{e}}_y. \quad (2.44)$$

⁴Von einem rechtslaufenden Feld $\psi^+(\mathbf{r}, t)$ zu einem linkslaufenden Feld $\psi^-(\mathbf{r}, t)$ kommt man immer über die Transformation $z \rightarrow -z$.

2 Theoretische Grundlagen

Die stehende Welle besitzt eine räumlich feste Struktur. Insbesondere verschwindet das Magnetfeld im Ursprung für alle Zeiten

$$\mathbf{B}_{\text{st}}(z = 0, t) = 0. \quad (2.45)$$

Die Knoten des stehenden elektrischen Feldes bzw. die Bäuche des stehenden Magnetfeldes sind gegenüber den Knoten des stehenden Magnetfeldes bzw. den Bäuchen des stehenden elektrischen Feldes um $\Delta\varphi = \pi/2$ phasenverschoben. In der laufenden Welle sind die elektrischen und magnetischen Feldern phasengleich, d. h. $\Delta\varphi = 0$. Setzt man die Felder der stehende Welle in die relativistischen Bewegungsgleichungen ein, so lautet die Komponentendarstellung des gekoppelten *impliziten* Differentialgleichungssystem (s. Anh. 7.2)

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = 2a_0\omega_0 \left[\frac{\tilde{p}_z}{\gamma} \sin(\omega_0 t) \sin(k_0 z) - \cos(\omega_0 t) \cos(k_0 z) \right] \quad (2.46)$$

$$\frac{d\tilde{p}_y}{dt} = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{d\tilde{p}_z}{dt} = -2a_0\omega_0 \frac{\tilde{p}_x}{\gamma} \sin(\omega_0 t) \sin(k_0 z) \quad (2.48)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -2a_0\omega_0 \frac{\tilde{p}_x}{\gamma} \cos(\omega_0 t) \cos(k_0 z) \quad (2.49)$$

mit $\gamma = \sqrt{1 + \tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_z^2}$ und $z = c \int \tilde{p}_z / \gamma dt$.

Mit der Anfangsbedingung, daß das Elektron in einem Knoten des stehenden elektrischen Feldes bzw. in einem Bauch des stehenden Magnetfeldes ruht, d. h. $\tilde{\mathbf{p}}(t = 0) = 0$ und $\gamma(t = 0) = 1$ für $\mathbf{E}_{\text{st}} = 0$, $\mathbf{B}_{\text{st}} = \max$, wobei $k_0 z = (m + 1/2)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, findet man die analytische Lösung

$$p_x(t) = 0, p_y(t) = 0, p_z(t) = 0, \gamma(t) = 1. \quad (2.50)$$

Mit der Anfangsbedingung, daß das Elektron in einem Bauch des stehenden elektrischen Feldes bzw. in einem Knoten des stehenden Magnetfeldes ruht, d. h. $\tilde{\mathbf{p}}(t = 0) = 0$ und $\gamma(t = 0) = 1$ für $\mathbf{E}_{\text{st}} = \max$, $\mathbf{B}_{\text{st}} = 0$, wobei $k_0 z = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, findet man die analytische Lösung

$$p_x(t) = -2a_0 m_e c \sin(\omega_0 t), p_y(t) = 0, p_z(t) = 0, \gamma(t) = \pm \sqrt{1 + 4a_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}. \quad (2.51)$$

2 Theoretische Grundlagen

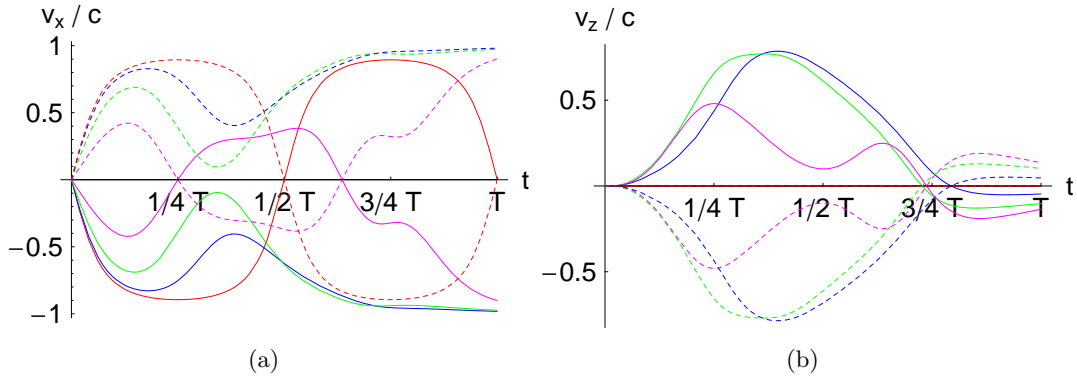


Abbildung 2.4: Geschwindigkeit eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (stehende Welle, Laborsystem). Die Geschwindigkeiten des Elektrons in Polarisations- (a) sowie in Ausbreitungsrichtung des Lasers (b) sind für den gerade relativistischen Fall $a_0 = 1$ aufgetragen. Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, die Geschwindigkeiten sind in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit angegeben, und die Zeit läuft über eine Laserperiode. Jede Kurve gehört zu einer bestimmten Anfangsposition des Elektrons in der stehenden Welle: 0 (rot), $1/16\lambda_0$ (blau), $\lambda_0/8$ (grün), $3/16\lambda_0$ (rosa), $\lambda_0/2$ (schwarze Nulllinie), $5/16\lambda_0$ (rosa, gestrichelt), $3/8\lambda_0$ (grün, gestrichelt), $7/16$ (blau, gestrichelt) und $1/2\lambda_0$ (rot, gestrichelt). Ab $z_0 > 1/2\lambda_0$ wiederholen sich die Kurven: Die v_x -Kurven wiederholen sich symmetrisch zu $z_0 = \lambda_0/2$, d. h. $9/16\lambda_0 \hat{=} 7/16\lambda_0$, $5/8\lambda_0 \hat{=} 3/8\lambda_0$, $11/16\lambda_0 \hat{=} 5/16\lambda_0 \dots$, die v_z -Kurven wiederholen sich gemäß $z_0 \hat{=} z_0 + \lambda_0/2$, d. h. $9/16\lambda_0 \hat{=} 1/16\lambda_0$, $5/8\lambda_0 \hat{=} 1/8\lambda_0$, $11/16\lambda_0 \hat{=} 3/16\lambda_0 \dots$. Die schwarze Nulllinie bzw. die roten Kurven stimmen mit der analytischen Lösung in einem Knoten bzw. einem Bauch des stehenden elektrischen Feldes überein.

D. h. In einem Knoten des elektrischen Feldes wirkt auf das Elektron nur die magnetische Kraft, daher bleibt das Elektron in Ruhe. In einem Knoten des Magnetfeldes wirkt auf das Elektron nur die elektrische Kraft, so daß das Elektron ausschließlich in x -Richtung oszilliert und keinen Impuls in z -Richtung aufnehmen kann! Wird das Elektron nicht in einem Knoten oder einem Bauch in der stehenden Welle geboren, so müssen die relativistischen Bewegungsgleichungen (2.46–2.49) numerisch gelöst werden.

Im folgenden werden für verschiedene Anfangspositionen die Geschwindigkeiten, der Lorentzfaktor - wegen $E_{\text{kin}}(\gamma) = m_e c^2 (\gamma - 1)$ entspricht der Lorentzfaktor der kinetische Energie - und die Bahnkurve des Elektrons berechnet (s. Abb. 2.4, 2.5). Es ist schwierig, sich die Bahnkurve des Elektrons anschaulich vorzustellen. Es wirkt sowohl

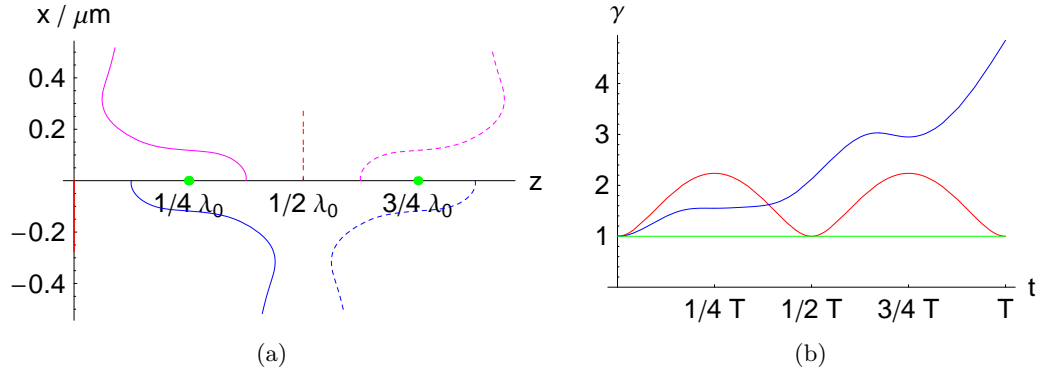


Abbildung 2.5: Bahnkurve und Lorentzfaktor eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (stehende Welle, Laborsystem). Die Bahnkurve und der Lorentzfaktor bzw. die kinetische Energie des Elektrons sind für den gerade relativistischen Fall $a_0 = 1$ aufgetragen. Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, und die Zeit läuft über eine Laserperiode. Jede Kurve gehört zu einer bestimmten Anfangsposition des Elektrons in der stehenden Welle: 0 (rot), $\lambda_0/8$ (blau), $\lambda_0/4$ (grün), $3/8\lambda_0$ (rosa), $\lambda_0/2$ (rot, gestrichelt), $5/8\lambda_0$ (rosa, gestrichelt), $3/4\lambda_0$ (grün) und $7/8\lambda_0$ (blau, gestrichelt). a) In einem Knoten des stehenden elektrischen Feldes oszilliert das Elektron in Polarisationsrichtung (rote Linien). In einem Bauch des stehenden elektrischen Feldes bleibt es in Ruhe (grüne Punkte). Die blauen und rosa Kurven zeigen die komplizierte Bewegung des Elektrons, falls die Anfangsposition in einem Wendepunkt des stehenden elektrischen Feldes liegt. b) Die blaue Kurve zeigt, daß das Elektron, falls seine Bahn beispielsweise in einem Wendepunkt des stehenden elektrischen Feldes beginnt, während einer Laserperiode Energie aufnehmen kann. Die Beschleunigung des Elektrons führt zur Abstrahlung elektromagnetischer Wellen.

die elektrische als auch die magnetische Kraft. Die elektrische Kraft führt zu einer linearen Schwingung in x -Richtung, und die magnetische zu einer Kreisbewegung in der x, z -Ebene; die Überlagerung ist ziemlich kompliziert. Das wesentliche ist, daß das Elektron u. U. während einer Laserperiode Energie aufnehmen und beschleunigt werden kann. Dies führt zu einer meßbaren Abstrahlung elektromagnetischer Wellen in einer stehenden Welle. Für schwach relativistische Laserintensitäten, d. h. $a_0 \lesssim 1$, ist der Einfluß der magnetischen Kraft vernachlässigbar, so daß das Elektron im wesentlichen in x -Richtung oszilliert und eine kleine Ablenkung in der x, z -Ebene erfährt.

2.2 Relativistische Autokorrelation

Zur Bestimmung der Laserpulsdauer dient die relativistische Autokorrelation. Im folgenden soll zunächst das allgemeine Prinzip einer Autokorrelationsmessung erklärt werden[16]: Eine Autokorrelation beruht darauf, daß ein einfallender Laserstrahl in zwei Teilstrahlen aufgeteilt wird, welche anschließend in einem nichtlinearen Medium überlappt werden. Die Teilstrahlen können durch eine Veränderung ihrer optischen Wege in der Zeit gegeneinander verschoben werden. In dem nichtlinearen Medium muß ein nichtlinearer optischer Prozeß stattfinden, welcher ein detektierbares intensitätsabhängiges Signal erzeugt. Das Signal heißt Autokorrelationssignal, da der Laserpuls mit sich selbst in Wechselbeziehung tritt. Die beiden Teilstrahlen können kollinear (parallele Wellenvektoren) oder unter einem bestimmten Winkel zueinander durch das nichtlineare Medium propagieren. Im kollinearen Fall spricht man, falls es die räumliche Auflösung der Detektion erlaubt, von einer interferometrischen Autokorrelation und im zweiten Fall von einer Intensitätsautokorrelation. In beiden Fällen handelt es sich jedoch um eine Einzelschuß-Autokorrelation (engl. : "single-shot autocorrelation"), bei welcher das Meßsignal von der Intensität und der zeitlichen Verzögerung zwischen den beiden Teilstrahlen abhängt. Ändert man die zeitliche Verzögerung zwischen mehreren aufeinanderfolgenden Laserpulsen, so handelt es sich um eine Mehrschuß-Autokorrelation (engl. "multi-shot autocorrelation"). Es ist wesentlich, daß der nichtlineare optische Prozeß, der für die Autokorrelation ausgenutzt wird, instantan, d. h. innerhalb einer Zeitdauer, die sehr viel kürzer als die Laserpulsdauer ist, erfolgt.

$S(I^n)$ wird als Autokorrelationssignal n -ter Ordnung bezeichnet, wobei I die Laserintensität ist. Da in dieser Arbeit im Gegensatz zu klassischen, konventionellen Autokorrelationstechniken relativistische Laserintensitäten eingesetzt werden, handelt es sich um eine relativistische Autokorrelation. Die Abstrahlung der intensitätsabhängigen zweiten Harmonischen ist in diesem Fall der nichtlinearer Prozeß. Die abgestrahlte Intensität

2 Theoretische Grundlagen

der zweiten Harmonischen ($S_{2\omega}$) läßt sich über die relativistische Bewegung eines freien Elektrons in einem intensiven Laserfeld zweier gegenläufiger Laserpulse berechnen (s. Abb. 1.1). Da das Elektron sofort auf das äußere Laserfeld reagiert, kann der Prozeß als instantan angesehen werden.

Aus dem letzten Abschnitt sind bereits die Bahnkurven eines freien Elektrons in einer laufenden und einer stehenden Welle bekannt. Aus der Bahnkurve erhält man ganz allgemein durch zweimaliges zeitliches Ableiten die abgetrahlte Intensität, die proportional zum Quadrat der Beschleunigung einer bewegten Ladung ist. Da die Abstrahlung der zweiten Harmonischen aus der Bewegung in z -Richtung resultiert, gilt $S_{2\omega} \sim \ddot{z}^2$. Bei der Herleitung der Bahnkurven werden zur Vereinfachung ebene, kontinuierliche Wellen vorausgesetzt. Die realen Laserpulse werden im folgenden durch eine Faltung von Gauß'schen Strahlen und Gauß'schen Pulsen beschrieben. Dazu werden die ebenen Wellen durch Gauß'sche Strahlen und die kontinuierliche Wellen durch Gauß'sche Pulse von endlicher Zeitdauer ersetzt.

Überlagert man zwei gegenläufige Laserpulse mit Gauß'schem Intensitätsprofil und berücksichtigt zusätzlich, daß die Laserpulse in Raum und Zeit gegeneinander verschoben sein können, so gestaltet sich die vollständige Lösung der relativistischen Bewegungsgleichungen als sehr schwierig. Aus diesem Grund kann man zu einer störungstheoretischen Beschreibung übergehen, welche für schwach relativistische Laserintensitäten, d. h. für $a_0 \lesssim \sqrt{2}$, gültig ist. Für den relativistischen Parameter $a_0 = 1.2$, der in den Experimenten gemessen wurde, ist dies gerechtfertigt. Es wird außerdem überprüft, ob die vollständige Beschreibung für niedrigere Laserintensitäten auch wirklich in die störungstheoretische übergeht. Schließlich wird das relativistische Autokorrelationssignal in störungstheoretischer Näherung berechnet. Es zeigt sich, daß es sich um ein Autokorrelationssignal zweiter Ordnung in der Intensität handelt, d. h. $S_{2\omega}(I^2)$.

2.2.1 Überlagerung gegenläufiger Laserpulse

Die Wellengleichung beschreibt allgemein die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Raum und Zeit. Sie lautet im Vakuum[24, 25]

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}^\pm = 0, \quad (2.52)$$

2 Theoretische Grundlagen

wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit und $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ der Laplace-Operator sind. Löst man die Wellengleichung in paraxialer Näherung [24, 25]

$$2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \gg \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.53)$$

wobei $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ die Wellenzahl ist, so erhält man nach rechts und nach links laufenden Gauß'sche Strahlen (s. Anh. 7.15)

$$\mathbf{E}^\pm(r, z, t) = \frac{E_0 W_0}{W(z)} \exp(-q_\pm(z) r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_\pm(z)) \exp(i\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.54)$$

wobei

$$z_0 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda_0} \quad (2.55)$$

die Rayleighlänge,

$$r = (x^2 + y^2) \quad (2.56)$$

der radiale Abstand von der optischen Achse,

$$q_\pm(z) = \frac{1}{W^2} \pm \frac{ik_0}{2|R|} \quad (2.57)$$

der q -Parameter⁵,

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \quad (2.58)$$

die Strahlbreite,

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \quad (2.59)$$

die Krümmung,

$$\tilde{\varphi}_\pm(z) = \mp k_0 z \pm |\tan^{-1}(z/z_0)| \quad (2.60)$$

die Phase und W_0 die Taillenbreite, d. h. die minimale Strahlbreite, sind. Die Intensität eines einzelnen Gauß'schen Strahles (Gauß'sche TEM₀₀-Mode, Abk. : "Gauß'sche transversal elektromagnetische Nullmode") ist proportional zu dem Betragsquadrat der

⁵Dieser q -Parameter unterscheidet sich von dem $q_{1/e}$ -Parameter aus Kap. 7.11!

2 Theoretische Grundlagen

Feldstärke

$$\begin{aligned}
 I(r, z) &\sim |\mathbf{E}^\pm(r, z, t)| \\
 &= \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)} \right)^2 \exp \left(-\frac{2r^2}{W(z)^2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Für die z -Abhängigkeit auf der optischen Achse, d. h. für $r^2 = 0$, ergibt sich

$$I_z \sim \frac{I_0}{1 + z^2/z_0^2} \tag{2.62}$$

und für die r -Abhängigkeit in der x, y -Ebene, die durch den Fokus bei $z = 0$ geht, ergibt sich

$$I_r \sim I_0 \exp \left(-2 \frac{r^2}{W_0^2} \right). \tag{2.63}$$

Im ersten Fall handelt es sich um ein Lorentz- und im zweiten Fall um ein Gauß'sches Intensitätsprofil. Das Gauß'sche Intensitätsprofil fällt viel schneller ab als das Lorentzprofil (s. Abb. 2.6). Superposition der nach rechts und der nach links laufenden Felder liefert weiterhin die stehenden elektrischen und die magnetischen Felder (s. Anh. 7.6)

$$E_{\text{st},x} = 2 \frac{E_0 W_0}{W} \exp \left(-\frac{r^2}{W^2} \right) \cos(\omega_0 t) \cos(A) \tag{2.64}$$

$$B_{\text{st},y} = -2 \frac{E_0 W_0}{cW} \exp \left(-\frac{r^2}{W^2} \right) \sin(\omega_0 t) \times \tag{2.65}$$

$$\times [B \sin(A) - C \cos(A)] \tag{2.66}$$

mit den Abkürzungen

$$A = \frac{k_0 r^2}{2R} + k_0 z - \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right) \tag{2.67}$$

$$B = -1 + \frac{r^2}{2R^2} - \frac{r^2 z_0^2}{2R^2 z^2} + \frac{W_0^2}{k_0 z_0 W^2} \tag{2.68}$$

$$C = \frac{W_0^2 z}{k_0 z_0^2 W^2} \left(1 - \frac{2r^2}{W^2} \right). \tag{2.69}$$

Die Momentaufnahmen des stehenden elektrischen Feldes sind immer symmetrisch zur Ordinate und die des stehenden Magnetfeldes antisymmetrisch zum Ursprung (s. Abb. 2.7).

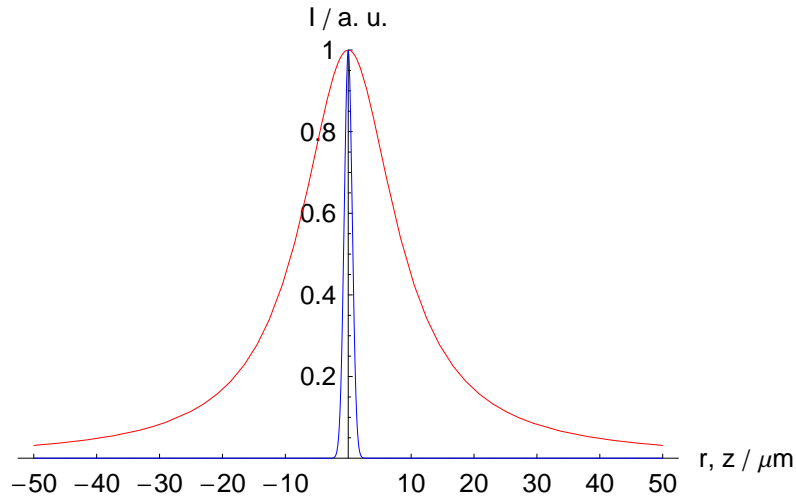


Abbildung 2.6: Longitudinales und transversales Intensitätsprofil eines einzelnen Laserpulses. Longitudinales Lorentzprofil (rot) und transversales Gauß'sches Intensitätsprofil (blau) in Abhängigkeit des radialen Abstandes (r) bzw. des longitudinalen Abstandes (z). Die Rayleighlänge beträgt $z_0 = 9 \mu\text{m}$, die Tailenbreite $W_0 = 1.26 \mu\text{m}$ und die Anfangsintensität $I_0 = 1$ (a. u.). Das longitudinale Intensitätsprofil (Lorentzkurve, rot) nimmt viel schneller ab als das transversale Intensitätsprofil (Gauß'sche Kurve, blau). In transversale Richtung verschwindet die Intensität bereits nach wenigen Mikrometern ($< 10 \mu\text{m}$).

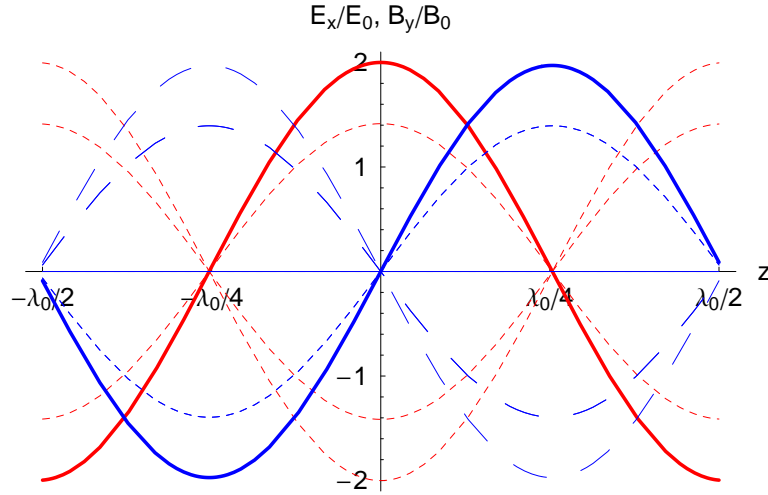


Abbildung 2.7: Stehendes Laserfeld. Stehendes elektrisches Feld (rot) und Magnetfeld (blau) als Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen auf der optischen Achse ($r^2 = 0$). Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, die Tailenbreite $W_0 = 1.26 \mu\text{m}$ und die Rayleighlänge $z_0 = 9 \mu\text{m}$; wegen $z \lesssim |\lambda_0/2|$ liegen die Felder in der Nähe des Fokus. Sie sind um $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ gegeneinander phasenverschoben und in Einheiten ihrer Amplituden E_0 bzw. $B_0 = E_0/c$ aufgetragen. Die dicken Kurven gehören zu den Zeitpunkten $t = 0$ bzw. $t = T/4$, bei denen das stehende elektrische Feld ($\sim \cos\omega_0 t$) bzw. das stehende Magnetfeld ($\sim \sin\omega_0 t$) maximale Auslenkung besitzen. Die gestrichelten Kurven repräsentieren Momentaufnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten während einer Laserperiode T . Es ist eine räumlich feste Struktur mit Knoten und Bäuchen erkennbar. Für verschiedene Zeiten schwanken die Felder zwischen den Knoten auf und ab. Die Momentaufnahmen des elektrischen Feldes sind immer symmetrisch zur Ordinate und die des Magnetfeldes antisymmetrisch zum Ursprung. Das stehende Magnetfeld verschwindet im Fokus ($z = 0$) für alle Zeiten.

2 Theoretische Grundlagen

Die Intensität des stehenden Laserfeldes läßt sich wiederum über $I \sim EE^*$ berechnen; es folgt

$$I_{\text{st}}(r, z) \sim 4 \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)} \right)^2 \exp \left(-\frac{2r^2}{W(z)^2} \right) \cos^2(A) \quad (2.70)$$

und im Fokus

$$I_{\text{st}}(r, z)|_{r^2=0, z=0} = 4E_0^2. \quad (2.71)$$

D. h. In z -Richtung entstehen Intensitätsminima und -maxima entlang der optischen Achse (s. Abb. 2.8). Die Intensität ist in einer stehenden Welle im Fokus ($z = 0, r^2 = 0$) vier Mal so groß wie die Intensität einer laufenden Welle. Aufgrund des Gauß'schen Strahlprofiles nimmt die Einhüllende der Laserintensität mit größer werdendem Abstand vom Fokus ab

$$\lim_{r, z \rightarrow \infty} I(r, z) = 0. \quad (2.72)$$

In einem linearen Medium lautet die Wellengleichung [24, 25]

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}^\pm(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^L(\mathbf{r}, t), \quad (2.73)$$

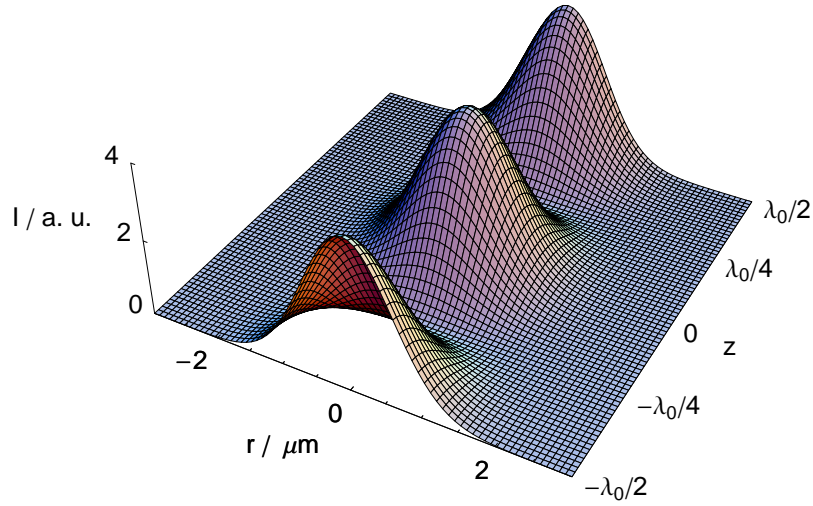
wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit, μ_0 die magnetische Feldkonstante, $\chi(\omega)$ die Suszeptibilität und $\bar{\mathbf{P}}^L(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \bar{\mathbf{E}}^\pm(\mathbf{r}, \omega)$ die lineare Polarisation im Frequenzraum sind. In Näherung einer langsam veränderlichen Einhüllenden der komplexen elektrischen Feldstärke $\tilde{E}(t)$, der sog. SVEA (engl. : "slowly varying envelope approximation") [24, 25]

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}(t) \ll \omega_0 \tilde{E}(t), \quad (2.74)$$

erhält man als Lösungen von Gl. 2.73 nach rechts und nach links laufende Gauß'sche Pulse (s. Anh. 7.16)

$$\begin{aligned} E_x^\pm(\eta^\pm, z) &= E_0 \exp \left[- \left(1 + i \frac{y^\pm(z)}{x} \right) \left(\frac{\eta^\pm}{\tau_g^\pm(z)} \right)^2 \right] \times \\ &\times \exp [i(\omega_0 t \mp k_0 z)] \end{aligned} \quad (2.75)$$

mit den Abkürzungen



(a)

Abbildung 2.8: Intensität eines stehenden Laserfeldes. Intensität eines stehenden Laserfeldes als Überlagerung der elektrischen Felder zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen. Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, die Taillenbreite $W_0 = 1.26 \mu\text{m}$ und die Rayleighlänge $z_0 = 9 \mu\text{m}$. Entlang der optischen Achse entstehen Intensitätsminima und Intensitätsmaxima. Im Fokus entsteht sowohl in Richtung der optischen Achse als auch senkrecht dazu ein Intensitätsgradient, der in Richtung des Fokus' zeigt (der Gradient zeigt allgemein in Richtung des steilsten Anstiegs). In Fokushöhe $z \lesssim |\lambda_0/2|$ sind alle Intensitätsmaxima gleich hoch. Die Intensität einer stehenden Welle ist im Fokus vier mal so hoch wie in einer laufenden Welle.

2 Theoretische Grundlagen

$$\eta^{\pm} = t \mp \frac{z}{v_g} \quad (2.76)$$

$$x = \frac{\tau_{g0}^2}{4(1+a^2)} \quad (2.77)$$

$$y^{\pm}(z) = \frac{a\tau_{g0}^2}{4(1+a^2)} \mp \frac{\tilde{D}z}{2}. \quad (2.78)$$

Die Pulsdauer ist gegeben durch

$$\tau_g^{\pm}(z) = \sqrt{\frac{4}{x} \left(x^2 + y^{\pm 2}(z) \right)}, \quad (2.79)$$

wobei v_g die Gruppengeschwindigkeit, a der Chirp-Parameter (engl. : "to chirp", dtsh. : "zwitschern") und \tilde{D} die Gruppengeschwindigkeitsdispersion (sog. GVD: engl. "group velocity dispersion") der Laserpulse sind. Die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g^{-1} = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \right) \quad (2.80)$$

sowie die GVD

$$\tilde{D} = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big| \quad (2.81)$$

sind über Ableitungen der Dispersionsrelation definiert. Ausgehend von dem zeitabhängigen Teil Gauß'scher Pulse

$$E(t) = E_0 \exp \left[- (1 + ia) \frac{t^2}{\tau_{g0}^2} \right] \exp(i\omega_0 t) \quad (2.82)$$

wobei $\Delta\omega_{\text{puls}} = \sqrt{8 \ln 2 (1 + a^2)} / \tau_{g0}$ die FWHM-Halbwertsbreite (engl. : "full width at half maximum") der Winkelfrequenz ist, berechnet man die instantane Frequenz. Diese ergibt sich aus der Ableitung der Phase nach der Zeit, d. h. $\omega(t) = d\Phi/dt$. Differentiation der Phase

$$\Phi(t) = -a(t/\tau_{g0})^2 + \omega_0 t \quad (2.83)$$

liefert

$$\omega(t) = \omega_0 - 2at/\tau_{g0}^2. \quad (2.84)$$

2 Theoretische Grundlagen

Die instantane Frequenz steigt für negativen Chirp-Parameter (sog. "Up-Chirp") an und fällt für positiven Chirp-Parameter (sog. "Down-Chirp"). Oder anders ausgedrückt: Läuft ein Laserpuls mit Up-Chirp bzw. Down-Chirp auf einen Beobachter zu, so wird das Zwischern höher bzw. tiefer.

Die SVEA ist erfüllt, falls $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ gilt, wobei $\Delta\omega$ die spektrale Bandbreite und ω_0 die Mittenfrequenz des Lasers sind. Sie besagt, daß Änderungen der Feldeinhüllenden $\tilde{E}(t)$ innerhalb einer Laserperiode $T = 2\pi/\omega_0$ klein sein müssen. Die FWHM-Pulsdauer ist durch $\tau_p = \sqrt{2 \ln 2} \tau_{g0}$ gegeben⁶. Die SVEA läßt sich auch schreiben als $\tau_p \gg 1/\omega_0$; für die in den Experimenten gemessene Pulsdauer ($\tau_p = 84$ fs, s. Kap. 4.1) und die Mittenfrequenz des Lasers ($\omega_0 = 2 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$), ist die Bedingung erfüllt.

Faltet man den räumlichen Anteil der idealen Gauß'schen Strahlen (2.54) und den zeitlichen Anteil der idealen Gauß'schen Pulse ohne Chirp (2.82), so erhält man für die nach links und die nach rechts laufenden Laserpulse

$$E_x^\pm(r, z, t) = \frac{E_0 W_0}{W(z)} \exp(-q_\pm r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_\pm) \exp\left[-\frac{t^2}{\tau_{g0}^2}\right], \quad (2.85)$$

wobei E_0 die Amplitude der Laserfeldstärke ist. Für das räumlich *und* zeitlich abhängige elektrische Feld des von links kommenden Laserpulses gilt

$$\begin{aligned} E_L(r, z, t) = & \frac{E_{0L} W_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(z)}\right) \times \exp\left(-i\frac{k_0 r^2}{2R(z)}\right) \times \\ & \times \exp\left[-\left(\frac{t - z/c}{\tau_L}\right)^2\right] \exp\left[i\left(\omega_0 t - k_0 z + \eta(z)\right)\right] \end{aligned} \quad (2.86)$$

mit der Abkürzungen

$$W^2(z) = W_0^2 \left(1 + (z/z_0)^2\right) \quad (2.87)$$

$$R(z) = z \left(1 + (z_0/z)^2\right) \quad (2.88)$$

$$\eta(z) = -\tan^{-1}(z/z_0). \quad (2.89)$$

Berücksichtigt man, daß durch unterschiedliche optische Weglängen, d. h. durch einen Gangunterschied Δx , der beiden gegenläufigen Laserpulse eine Laufzeitverschiebung $\Delta\tau$

⁶Diese FWHM-Pulsdauer ist über die Feldeinhüllende der elektrischen Feldstärke und nicht über die Intensitätseinhüllende definiert. Bei der Auswertung der Experimente gehen wir stets von der Einhüllenden der Intensität aus. Es gelten daher andere Beziehungen (s. Anh. 7).

2 Theoretische Grundlagen

eintritt, und der Fokus nicht bei Null, sondern bei $z_1 \neq 0$ sitzt, so ergibt sich für das elektrische Feld des von rechts kommenden Laserpulses

$$\begin{aligned}
 E_R(r, z - z_1, t - \Delta\tau) &= \frac{E_{0R}W_0}{W(z - z_1)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(z - z_1)}\right) \exp\left(i\frac{kr^2}{2R(z - z_1)}\right) \times \\
 &\times \exp\left[-\left(\frac{t + (z - z_1)/c - \Delta\tau}{\tau_L}\right)^2\right] \times \\
 &\times \exp\left[i\left(\omega(t - \Delta\tau) + k(z - z_1) - \eta(z - z_1)\right)\right]. \quad (2.90)
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen E_{0L} bzw. E_{0R} die Amplituden der von links bzw. der von rechts kommenden elektrischen Laserfelder. Überlagerung der elektrischen Felder liefert schließlich

$$E_{\text{ges}}(r, z, t, z_1, \Delta\tau) = E_L(r, z, t) + E_R(r, z - z_1, t - \Delta\tau). \quad (2.91)$$

2.2.2 Abstrahlung der zweiten Harmonischen

Unter der Annahme, daß der Einfluß des Magnetfeldes schwach ist, und sich das Elektron im wesentlichen in x -Richtung bewegt (schwach relativistischer Fall), läßt sich der Lorentzfaktor schreiben als [26]

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}/c)^2}} \approx (1 - \langle \dot{x}^2 \rangle / c^2)^{-1/2} = \text{const.} \quad (2.92)$$

In diesem Fall vereinfachen sich die relativistischen Bewegungsgleichungen (2.14) zu

$$\gamma m_e \frac{d^2 \dot{\mathbf{r}}^2}{dt^2} = -e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \quad (2.93)$$

Berechnet man das Kreuzprodukt $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = (-\dot{z}B_y, 0, \dot{x}B_y)$, so erhält man das vereinfachte Differentialgleichungssystem

$$\gamma m_e \ddot{x} = -eE_x + e\dot{z}B_y \quad (2.94)$$

$$\gamma m_e \ddot{y} = 0 \quad (2.95)$$

$$\gamma m_e \ddot{z} = -e\dot{x}B_y. \quad (2.96)$$

2 Theoretische Grundlagen

Setzt man zur Vereinfachung der Rechnung weiterhin die elektrischen und magnetischen Felder einer *Schwingung* ein

$$E_x = E_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.97)$$

$$B_y = \frac{E_0}{c} \sin(\omega_0 t), \quad (2.98)$$

und vernachlässigt weiterhin den Faktor \dot{z}/c - die Geschwindigkeit in z -Richtung ist wegen des schwachen Magnetfeldes klein -, so ergibt sich

$$\gamma m_e \ddot{x} = -e E_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.99)$$

$$\gamma m_e \ddot{y} = 0 \quad (2.100)$$

$$\gamma m_e \ddot{z} = -e \frac{\dot{x}}{c} E_0 \cos(\omega_0 t). \quad (2.101)$$

In nullter Ordnung Störungstheorie erhält man die Beschleunigung und nach zeitlicher Integration mit der Anfangsbedingung $\dot{x}(t=0) = 0$ die Geschwindigkeit in x -Richtung

$$\ddot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m_e} E_0 \cos(\omega_0 t) \rightarrow \dot{x}^{(0)} = -\frac{a_0 c}{\gamma} \sin(\omega_0 t). \quad (2.102)$$

Setzt man dies in den konstanten Lorentzfaktor (2.92) ein

$$\gamma \approx \left(1 - \langle \dot{x}^{(0)2} \rangle / c^2 \right)^{-1/2}, \quad (2.103)$$

so folgt eine nützliche Relation zwischen dem Lorentzfaktor und dem relativistischen Parameter

$$\gamma \approx \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{2}}. \quad (2.104)$$

Der Vergleich mit dem exakten Ausdruck - wobei noch über eine Laserperiode zeitlich gemittelt wird -

$$\langle \gamma(\phi^+) \rangle = \left\langle 1 + \frac{1}{2} a_0^2 \sin^2 \phi^+ \right\rangle = 1 + \frac{1}{4} a_0^2 \quad (2.105)$$

zeigt, daß beide Formeln für schwach relativistische Intensitäten, d. h. für $a_0 \lesssim \sqrt{2}$, gut übereinstimmen und näherungsweise konstant sind (s. Abb. 2.9). Über (2.101) bekommt man schließlich in erster Ordnung Störungstheorie die Beschleunigung in z -Richtung

$$\ddot{z}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{a_0^2 c \omega_0}{\gamma^2} \sin(2\phi^+). \quad (2.106)$$

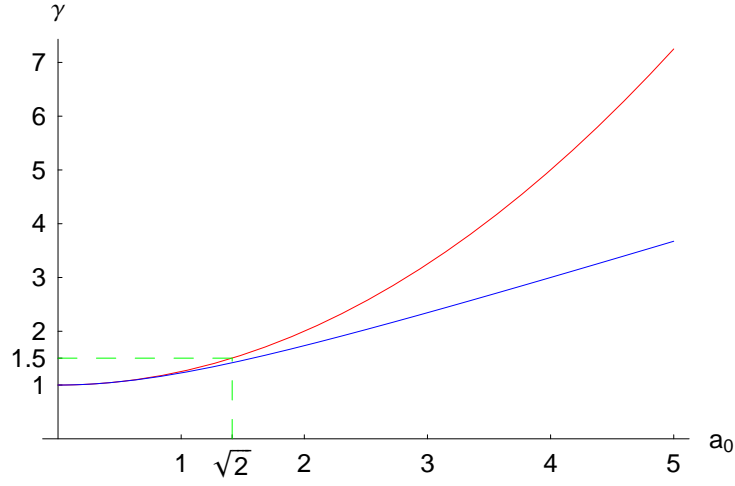


Abbildung 2.9: Exakter Lorentzfaktor und Lorentzfaktor in Störungstheorie. Der exakte, zeitlich gemittelte Lorentzfaktor (rot) und der Lorentzfaktor in Störungstheorie (blau) sind gegen die Laserintensität aufgetragen. Innerhalb des Bereichs $a_0 \lesssim \sqrt{2}$ (links der grün gestrichelten, senkrechten Linie), d. h. für schwach relativistische Intensitäten, stimmen beide Lorentzfaktoren näherungsweise überein und bleiben näherungsweise konstant: $\gamma < 1.5$ (unterhalb der grün gestrichelten, waagrechten Linie). Für hohe Laserintensitäten weichen die verschiedenen Lorentzfaktoren (rote und blaue Kurven für große a_0) voneinander ab. Daher ist eine störungstheoretische Beschreibung nur für den schwach relativistischen Bereich $a_0 \lesssim \sqrt{2}$ geeignet.

2 Theoretische Grundlagen

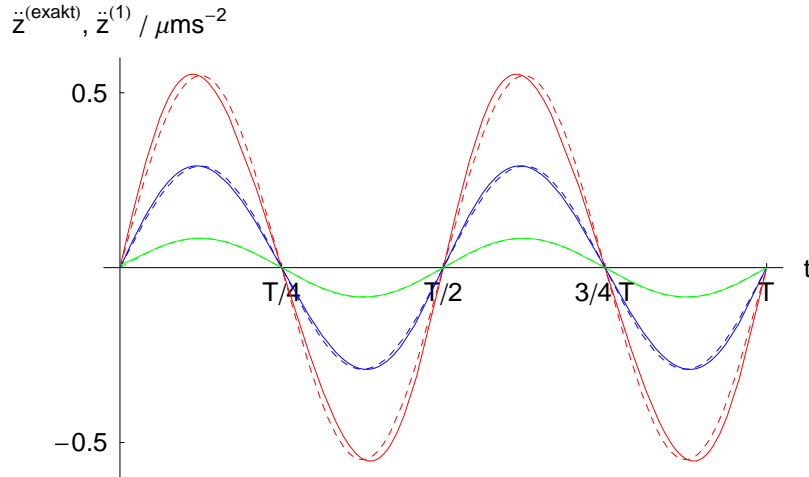


Abbildung 2.10: Exakte Beschleunigung und Beschleunigung in erster Ordnung Störungstheorie im Vergleich. Die exakte Beschleunigung (durchgezogene Kurven) und die Beschleunigung in erster Ordnung Störungstheorie (gestrichelte Kurven) sind für verschiedene Laserintensitäten $a_0 = 1.5$ (rot), $a_0 = 1$ (blau) und $a_0 = 0.5$ (grün) aufgetragen. Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, und die Zeit läuft über eine Laserperiode $T = 2.65 \text{ fs}$. Die exakten und die störungstheoretischen Kurven liegen bei hohen Laserintensitäten auseinander. Für niedrigere Intensitäten nähern sich die Kurven einander an und liegen schließlich übereinander (z. B. die gestrichelte grüne und die durchgezogene grüne Kurve). Die störungstheoretische Berechnung der Beschleunigung ist daher für schwach relativistische Intensitäten sinnvoll.

Die implizite Gleichung für die z -Komponente der "Achterbahn" (2.40) läßt sich nach z auflösen

$$z = -\frac{1}{2}a_0^2 \frac{c}{\omega_0} \frac{\sin(2\phi^+(z, t))}{\sqrt{16 + 8a_0^2}} \rightsquigarrow z(t). \quad (2.107)$$

Da die z -Auslenkung der Achterbahn klein ist ($z \simeq 1/100 \mu\text{m}$, s. Abb. 7.3) und somit bei einer Mittenwellenlänge des Lasers von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ auch die Winkel $k_0 z \ll 1$ klein bleiben, gilt

$$\sin(k_0 z) \approx k_0 z, \quad \cos(k_0 z) \approx 1. \quad (2.108)$$

Leitet man diesen Ausdruck für $z(t)$, welcher der besseren Übersicht wegen nicht angeführt wird, zweimal zeitlich ab, so ergibt sich die Beschleunigung $\ddot{z}^{(\text{exakt})}$, die mit der Beschleunigung $\ddot{z}^{(1)}$ in erster Ordnung Störungstheorie (2.106) verglichen wird (s. Abb. 2.10). Für hohe Laserintensitäten $a_0 \gg 1$ weichen die Beschleunigungen voneinander ab, für

2 Theoretische Grundlagen

niedrigere Laserintensitäten nähern sie sich immer weiter an. Für schwach relativistischen Laserintensitäten, d. h. $\gamma \lesssim 1.5$ (s. Abb. 2.9), ist die störungstheoretische Berechnung der Beschleunigung daher sinnvoll. Im folgenden soll konkret die abgestrahlte Intensität der zweiten Harmonischen berechnet werden. Eine Abstrahlung genau bei der zweiten Harmonischen der Laserfrequenz ergibt sich nur bei störungstheoretischer Behandlung; i. a. tritt eine Frequenzverschiebung auf. Die Beschleunigung in nullter Ordnung Störungstheorie in x -Richtung (2.102) lautet

$$\ddot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m_e} E(t). \quad (2.109)$$

Integriert man zeitlich mit der Anfangsbedingung, daß sich das Elektron zum Zeitpunkt $t = -\infty$ im Maximum des zeitabhängigen elektrischen Feldes $E(t)$ befindet, d. h. $\dot{x}(t = -\infty) = 0$, $x(t = -\infty) = 0$, $\dot{z}(t = -\infty) = 0$ und $z(t = -\infty) = 0$, so folgt

$$\dot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m_e} \int_{-\infty}^t E(t') dt'. \quad (2.110)$$

Setzt man dies in (2.101) ein, so erhält man für die Beschleunigung in erster Ordnung Störungstheorie in z -Richtung

$$\ddot{z}^{(1)} = \frac{e^2}{\gamma^2 m_e^2 c} E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt'. \quad (2.111)$$

Die durch Störungsreihenentwicklung vernachlässigten Korrekturen liegen bei ca. 1 %, also im unteren Prozentbereich (s. Anh. 7.12). Da die obige Beziehung (2.111) unabhängig von der Gestalt des elektrischen Feldes $E(t)$ ist, gilt sie sowohl für laufende als auch für stehende Wellen. Das abgestrahlte elektrische Feld eines einzelnen Elektrons lautet allgemein [21]

$$|E_T(\rho, \vartheta, t)| = \frac{e \ddot{z}(t - \rho/c) \sin \vartheta}{4\pi \varepsilon_0 c^2 \rho}, \quad (2.112)$$

wobei ρ der Beobachtungsabstand und ϑ der -winkel sind. Da unter einem Winkel von $\vartheta \approx 90^\circ$ beobachtet wird (s. Abb. 4.19), d. h. $\sin \vartheta \approx 1$, gilt $\rho = \text{const.}$ Setzt man (2.111) in (2.112) ein, so ergibt sich für das Betragquadrat der Feldstärke

$$|E_T|^2 = \frac{e^2 r_e^2}{m_e^2 c^2 \gamma^4 \rho^2} \left| E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt' \right|^2, \quad (2.113)$$

2 Theoretische Grundlagen

wobei $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$ der klassische Elektronenradius ist. Die abgestrahlte Intensität der zweiten Harmonischen lautet somit

$$\begin{aligned} I_{2\omega} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E_T|^2 \\ &= \frac{\epsilon_0 c e^2 r_e^2}{m_e^2 c^2 \gamma^4 \rho^2} \left| E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt' \right|^2. \end{aligned} \quad (2.114)$$

2.2.3 Räumlich gemitteltes Autokorrelationssignal

Aus dem vorigen Unterabschnitt ist die abgestrahlte Intensität der zweiten Harmonischen ($I_{2\omega}$) bekannt. Für die auf die (zeitintegrierende!) CCD-Kamera (engl. : "charged coupled device") auftreffende Energie folgt daraus (s. Abb. 4.19) [17]

$$S_{2\omega}(\Delta\tau, z, z_1) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \left| E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt' \right|^2 dt \quad (2.115)$$

Ist die Einhüllende des elektrischen Feldes $E(t)$ hinreichend langsam veränderlich, und geht sie für $t \rightarrow -\infty$ gegen Null, so gilt die mathematische Beziehung

$$\int_{-\infty}^t E(t') dt' \approx \frac{1}{i\omega} E(t). \quad (2.116)$$

Mit ihr ergibt sich für das Meßsignal

$$S_{2\omega}(\Delta\tau, z, z_1) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} |E^2(t)|^2 dt \quad (2.117)$$

$$\sim \int_{-\infty}^{+\infty} I^2(t) dt, \quad (2.118)$$

es handelt es sich also um ein intensitätsabhängiges Signal zweiter Ordnung!

Es soll nun das folgende Integral ausgewertet werden

$$S_{2\omega}(\Delta\tau, z, z_1) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} |E^2(t)|^2 dt, \quad (2.119)$$

wobei sich das elektrische Feld aus der Summe der Felder des von links und des von rechts kommenden Laserpulses $E_{\text{ges}}(\Delta\tau, r, z, z_1 t)$ zusammensetzt. Da die Abbildung eine räumliche Auflösung von etwa $5\mu\text{m}$ besitzt (s. Kap. 4.3), ist die Autokorrelationsmessung nicht interferometrisch! Für den Integranden aus (2.119) erhält man daher unter

2 Theoretische Grundlagen

Vernachlässigung der räumlich schnell oszillierenden Anteile (s. Anh. 7.12)

$$\begin{aligned} J_I &= \left| (E_L + E_R)^2 \right|^2 \\ &= |E_L^2|^2 + |E_R^2|^2 + 4 |E_R|^2 |E_L|^2. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Weiterhin werden die Felder (2.86) und (2.90) in den Integranden eingesetzt und das (über das Volumen integrierte) Signal berechnet

$$S_{2\omega}(\Delta\tau, z, z_1) \sim \int_0^\infty 2\pi r dr \int_{-\infty}^{+\infty} J_I dt. \quad (2.121)$$

Das Meßsignal lautet schließlich (s. Anh. 7.12)

$$\begin{aligned} S_{2\omega}(z, z_1, \Delta\tau) \sim & \frac{I_{0L}^2}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} + \frac{I_{0R}^2}{1 + \left(\frac{z-z_1}{z_0}\right)^2} + \frac{4I_{0L}I_{0R}}{1 + \left(\frac{z-z_1/2}{z_0}\right)^2 + \frac{z_1^2}{4z_0^2}} \times \\ & \times \exp \left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z - z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.122)$$

wobei I_{0L} bzw. I_{0R} die Intensitäten des von links bzw. des von rechts kommenden Laserpulses sind. Im Anhang wird die Funktion $S_{2\omega}(z, z_1, \Delta\tau)$ noch genauer diskutiert (s. Anh. 7.12). Der obige Ausdruck für das Meßsignal dient dazu, aus den experimentellen Kurven Werte für die Rayleighlänge (z_0) und die Pulsdauer (τ_L) zu ermitteln (s. Kap. 4.4).

2.3 Laser-Plasma

Ein Plasma ist ganz allgemein eine gasförmige Ansammlung neutraler und geladener Teilchen (Elektronen, Ionen, Atome und Moleküle), die aufgrund ihrer Ladungen untereinander wechselwirken und sich in starken elektromagnetischen Feldern aufhalten. In den Experimenten wird das Plasma dadurch erzeugt, daß Laserpulse mit relativistischer Intensität in einen Helium-Gasstrahl fokussiert werden (s. Abb. 3.4). Das Laserfeld reißt die Elektronen aus ihren Bahnen heraus. Sie sind nicht mehr an ihre Kerne gebunden, sondern frei; das Heliumgas wird ionisiert. Die Ionisation geschieht ab Laserintensitäten von $I_{\text{ion}} \gtrsim 10^{14} \text{ W/cm}^2$ (vgl. relativistische Laserintensität: $I_{\text{rel}} \simeq 10^{18} \text{ W/cm}^2$).

Zur Abschätzung der oberen Grenze für die Laserintensität, bei welcher die Ionisation einsetzt, kann man von dem einfachen Modell der Feldionisation ausgehen [27]: Dazu wird

2 Theoretische Grundlagen

ein Atom im Laserfeld betrachtet. Die Umlaufzeit des Elektrons auf der ersten Bohr'schen Bahn beträgt $T_a = 2\pi a_B / c\alpha \approx 1.4 \times 10^{-16}$ s, wobei $\alpha \approx 1/137$ die Feinstrukturkonstante ist. Da bei einer Mittenwellenlänge des Lasers $\lambda_0 = 795$ nm die Laserperiode $T_0 = 2.7 \times 10^{-15}$ fs $\approx 20T_a$ beträgt, wirkt das optische Laserfeld näherungsweise wie in statisches Feld auf das Atom. Durch das optische Laserfeld wird das Atompotential abgesenkt. Das effektive Atompotential ergibt sich aus der Summe des Coulombpotentials $V_c = -Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$, wobei Z die Kernladungszahl und r der Abstand vom Kern ist, und des Laserpotentials $V_L = -E_L r$ zu

$$V_{\text{eff}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E_L r. \quad (2.123)$$

Das effektive Potential ist maximal bei $V_{\text{max}} = V_{\text{eff}}(r_{\text{max}})$. Ist die Ionisationsenergie eines Wasserstoffatoms $|V_H| = Z^2 e^2 / 8\pi\epsilon_0 a_B$ so groß wie das maximale effektive Potential $|V_{\text{max}}|$, so tritt Ionisation auf. Daraus ergibt sich schließlich das optische Laserfeld

$$E_{\text{ion, feld}} = \frac{Z^3}{16} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_B^2} = \frac{Z^3}{16} E_{\text{at}}, \quad (2.124)$$

wobei $E_{\text{at}} = e/4\pi\epsilon_0 a_B^2$ das atomare elektrische Feld und a_B der Bohr'sche Radius sind. Das optische Laserfeld wird benötigt, um ein Elektronen von einem gebundenen in einen freien Zustand (in das Kontinuum) zu heben. Feldionisation findet statt, falls die Laserintensität größer ist als

$$I_{\text{ion, feld}} = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_{\text{ion}}^2 = \frac{Z^6}{256} I_{\text{at}}, \quad (2.125)$$

wobei $I_{\text{at}} \approx 3 \times 10^{16}$ W/cm² die atomare Intensität ist. Für $Z = 2$ (zweifach ionisiertes Helium) liegt die Ionisationsbarriere bei $I_{\text{ion, feld}} \sim 10^{16}$ W/cm². Multiphotonen- und Tunnelionisationsprozesse setzen jedoch bereits bei kleineren Laserintensitäten ein ($I_{\text{ion}} \sim 10^{14}$ W/cm²).

Für niedrige Kernladungszahlen, d. h. für kleine Z , können die Elektronen in einem Plasma als frei angesehen werden. Die freien Plasmalektronen werden in dem starken elektrischen Laserfeld beschleunigt und stoßen mit weiteren Elektronen, so daß sich die Ionisation lawinenartig verstärkt (sog. Sekundärionisation). Außerdem werden sie durch die elektrischen und magnetischen Laserfelder auf bestimmte Bahnen gezwungen: lineare Oszillation, Zick-Zack-Bewegung oder Achterbahn (s. Kap. 2.1). Da die Dauer der Laser-Plasma-Wechselwirkung i. a. sehr kurz (< 1 ps) ist, stellt sich in dieser Zeit noch kein thermisches Gleichgewicht zwischen den Ionen und den Elektronen ein. Daher läßt sich die Temperatur eines Laserplasmas entweder über die Elektronen- oder die (viel

2 Theoretische Grundlagen

kleinere) Ionentemperatur festlegen. Die mittlere Elektronenergie eines lasererzeugten Plasmas liegt in einem Bereich von $10\text{ eV} \dots 100\text{ eV}$. Dies entspricht Temperaturen von $10^7\text{ K} \dots 10^8\text{ K}$ ($1/40\text{ eV} \hat{=} 10^5\text{ K}$).

Da die typischen Elektronendichten in den Experimenten bei $n_e \simeq 10^{19}\text{ cm}^{-3}$ liegen (s. Kap. 4), können die Plasmalektronen zwar als frei angesehen werden, jedoch nicht mehr einzeln betrachtet werden. Weiterhin ist der positive Hintergrund, der durch die viel schwereren und dadurch trägeren Ionen in einem lasererzeugten Plasma erzeugt wird, nicht mehr vernachlässigbar⁷.

Im allgemeinen finden in einem Laserplasma auch nichtlineare Prozesse statt, die zu einer Selbstfokussierung des Laserlichtes führen können, und zur Folge haben, daß das Laserlicht über mehrere Rayleighlängen ($z_0 = 9\text{ }\mu\text{m}$, s. Kap. 4.4) hinaus fokussiert bleibt. Dadurch bildet sich ein über mehrere hundert Mikrometer langer, intensiver Plasmakanal, welcher "relativistischer Kanal" heißt. Die Selbstfokussierung resultiert aus dem kollektiven Verhalten der Plasmaelektronen, die sich in einem intensiven Laserfeld befinden; sie findet nicht im Vakuum statt.

Die Selbstfokussierung von Laserlicht und die daraus resultierende Ausbildung relativistischer Kanäle werden in den Experimenten beobachtet (s. Kap. 4.3). Die Erzeugung einer lasergetriebenen Plasmawelle, die zur effektiven Beschleunigung von Elektronen auf relativistische Energien, d. h. $E_{\text{kin}} \gg 512\text{ keV}$, führen kann, wird *nicht* beobachtet. Sie soll dennoch behandelt werden, um zukünftige Experimente, welche mit dem Zweistrahlaufbau durchgeführt werden sollen, zu verstehen.

2.3.1 Selbstfokussierung

Zunächst wird die Ausbreitung eines Laserpulses in einem Laserplasma behandelt. Dabei wird untersucht, unter welchen Bedingungen sich der Laserpuls im Plasma überhaupt ausbreiten kann. Die klassische Dispersionsrelation des Plasmas gibt Auskunft über die Ausbreitungseigenschaften des Laserpulses in einem Plasma. Die Ausbreitungseigenschaften führen zu einer Einteilung des Plasmas hinsichtlich seiner optischen Eigenschaften (unter- und überdichtetes Plasma). Die Transparenz und die Reflektivität eines Plasmas sind von besonderer Bedeutung für die Aufnahme von Schattenbildern in den Experimenten (s. Kap. 4). Aus der Dispersionsrelation des Plasmas läßt sich unmittelbar die Phasengeschwindigkeit ablesen, mit welcher sich der Laserpuls im Plasma ausbreitet.

Es wird die ponderomotorische Kraft eingeführt, welche die zeitliche gemittelte Lorentzkraft ist. Sie tritt auf, falls ein räumliches Intensitätsprofil $I_L(x, y, z)$ vorhanden ist,

⁷ $m_p \approx 1836 m_e$, wobei m_p die Protonen- und m_e die Elektronenmasse sind.

2 Theoretische Grundlagen

und sie ist proportional zum negativen Gradienten der Laserintensität (2.139)

$$\mathbf{F}_{\text{pond}}(x, y, z) \sim -\nabla I_L(x, y, z). \quad (2.126)$$

D. h. In einem transversalen Intensitätsprofil $I_L = I_L(r, z = \text{const})$, wobei r der radiale Abstand von der optischen (z -)Achse ist, und welches mit größer werdendem radialen Abstand von der optischen Achse abnimmt, also $I(r) < I(0)$ (gültig für eine Gauß'sche TEM₀₀-Mode, Gl. 2.61), werden die Plasmaelektronen durch die ponderomotorische Kraft so weit nach außen gedrückt, bis sich zwischen ihnen und den zurückbleibenden schwereren Ionen ein Gleichgewicht einstellt (sog. "ponderomotorische Verdrängung").

Aus dem resultierenden gleichsam statischen elektrischen Feld läßt sich über die Poisson-Gleichung ("Ladungsdichte ist Quelle des elektrischen Feldes") die räumlich abhängige Elektronendichte $n_e(r, z = \text{const})$ bestimmen. Der radial abhängige Brechungsindex im Plasma lautet (2.130)

$$n(r) = \sqrt{1 - \omega_p^2(r) / \omega_0^2}, \quad \omega_p = \left(\frac{e^2 n_e(r)}{\varepsilon_0 m_e(r)} \right)^{1/2}, \quad (2.127)$$

wobei e die Elementarladung, n_e die Elektronendichte, ε_0 die elektrische Feldkonstante, m_e die Elektronenmasse, ω_0 die Mittenfrequenz des Lasers und ω_p die Plasmafrequenz sind. Die Plasmafrequenz ist die Eigenfrequenz der gegen den positiv geladenen Hintergrund der schwereren Ionen schwingenden Plasmaelektronen. Sie hängt im wesentlichen von der Dichte bzw. der Teilchenzahl (n_e) und der Masse (m_e) der Plasmaelektronen ab.

Da die Geschwindigkeit der Elektronen bei relativistischen Laserintensitäten nahe der Lichtgeschwindigkeit ist, kommt die relativistische Massenzunahme zum Tragen. In einem transversalen Intensitätsprofil $I(r) < I(0)$ ist daher die Masse innen, d. h. in der Nähe der optischen Achse, größer als außen $m_e(0) > m_e(r)$. Die ponderomotorische Verdrängung der Elektronen und die relativistische Massenzunahme führen schließlich zu $n(0) > n(r)$, d. h. der Brechungsindex ist in der Mitte des transversalen Strahlprofils höher als am Rand. Daher krümmt sich die Wellenfront eines Laserpulses, welcher sich in z -Richtung ausbreitet, wie bei einer Sammellinse nach innen.

Der Laserpuls fokussiert sich gleichsam selbst (Selbstfokussierung) und bleibt daher länger als im Vakuum fokussiert. Es bilden sich relativistische Kanäle. Die Ursachen für die Selbstfokussierung sind demnach die ponderomotorische Kraft und die relativistische Massenzunahme der im intensiven Laserfeld schnell oszillierenden Elektronen. Schließlich wird die relativistische und die ponderomotorische Selbstfokussierung mit dem nichtli-

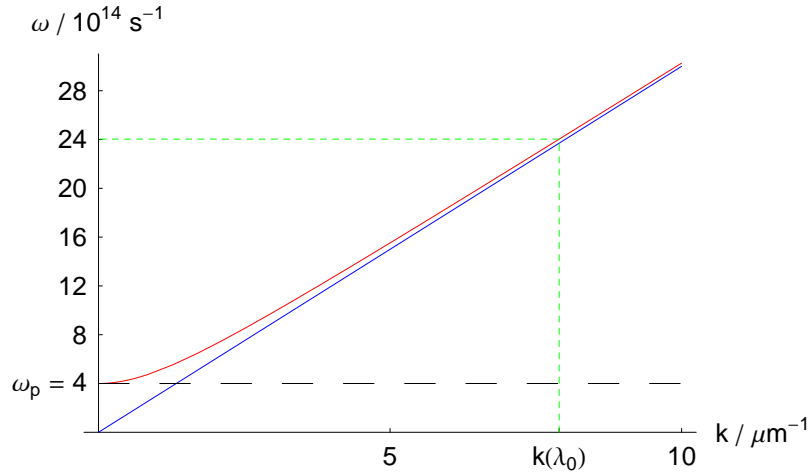


Abbildung 2.11: Klassische Dispersionsrelation des Plasmas. Die klassische Dispersionsrelation des Plasmas (rot) und die Dispersionsrelation im Vakuum $\omega = ck$ (blaue Linie) zum Vergleich sind gegen die Wellenzahl aufgetragen. Die Mittenwellenlänge des Lasers beträgt $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, und die Plasmadichte ist $\omega_p = 4 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ($n_e = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$). Die Dispersionsrelation gibt die Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \omega/k$ und die Gruppengeschwindigkeit $v_g = \partial\omega/\partial k$ des Lasers im Plasma an. Für Frequenzen, die größer als die Plasmafrequenz (ω_p) sind, kann der Laserpuls propagieren (oberhalb der schwarz gestrichelten Linie). Bei der Laserwellenlänge (λ_0) überschreitet die Winkelfrequenz $k(\lambda_0) = 7.9 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ die Plasmafrequenz (grün gestrichelte Linien). Im Grenzfall sehr hoher Winkelfrequenzen geht die Dispersionsrelation des Plasmas in diejenige des Vakuums über.

nearen Brechungsindex in Verbindung gebracht. Der folgende Abschnitt geht genauer auf die einzelnen Mechanismen ein.

Ausbreitung eines Laserpulses im Plasma

Ein Laserpuls, der durch ein Plasma läuft, genügt der Dispersionsrelation (s. Abb. 2.11, s. Anh. 7.3)

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 + k_0^2 c^2, \quad (2.128)$$

wobei k_0 die Wellenzahl und ω_0 die Laserfrequenz sind. Die Plasmafrequenz ist gegeben durch

$$\omega_p = \left(\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e} \right)^{1/2}, \quad (2.129)$$

2 Theoretische Grundlagen

wobei e die Elementarladung, n_e die Elektronendichte, ε_0 die Dielektrizitätszahl, m_e die Elektronenmasse und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum sind. Die Plasmafrequenz - die nur von der Elektronendichte abhängt - ist die Eigenfrequenz, mit der die leichten Elektronen gegen den positiven Hintergrund der viel schwereren Ionen schwingen. Bei gasförmigen Targets liegen die Elektronendichten bei $n_e \simeq 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ($\omega_p = 2 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$) und bei Festkörpertargets bei $n_e \simeq 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ($\omega_p = 6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$).

Die dielektrische Funktion des Plasmas lautet $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega_0^2$ (s. Anh. 7.3). Ziehen man die Wurzel aus der dielektrischen Funktion, so erhält man den Brechungsindex im Plasma

$$n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega_0^2} = \sqrt{1 - n_e/n_{\text{krit}}} \quad (2.130)$$

mit der kritischen Dichte

$$n_{\text{krit}}(\omega_0) = \frac{\varepsilon_0 m_e \omega_0^2}{e^2}. \quad (2.131)$$

Die kritische Dichte ist diejenige Dichte, bei der die Plasmafrequenz gleich der Laserfrequenz ist. Ist die Laserfrequenz kleiner als die Plasmafrequenz ($\omega_0 < \omega_p$), bzw. ist die Elektronendichte größer als die kritische Dichte ($n_e > n_{\text{krit}}$), so wird der Brechungsindex komplex. In diesem Fall spricht man von einem überdichten Plasma. Der Laserpuls kann sich nicht ausbreiten; er dringt stattdessen evaneszent in das Plasma ein und wird teilweise reflektiert und absorbiert. Ein unterdichtetes Plasma $\omega_0 > \omega_p$ bzw. $n_e < n_{\text{krit}}$ wirkt hingegen wie ein transparentes optisches Medium.

Das Prinzip wird noch von Bedeutung sein für die Aufnahme von Schattenbildern in den Experimenten. Für die Mittenwellenlänge des Lasers von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ ergibt sich eine kritische Dichte von $n_c = 1.8 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$. Da die gemessenen Elektronendichten ($n_e \lesssim 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, s. Kap. 4.2) kleiner sind als die kritische Dichte, kann der Laserpuls im Plasma propagieren.

Ponderomotorische Kraft und Ponderomotorisches Potential

Die orts- und zeitabhängigen elektrischen und magnetischen Felder lassen sich in komplexer Darstellung schreiben als

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega_0 t) \quad (2.132)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{i\omega_0} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \exp(i\omega_0 t), \quad (2.133)$$

wobei $E(\mathbf{r})$ der räumliche Anteil des elektrischen Laserfeldes ist. Für die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und die Verschiebung eines Elektrons im elektromagnetischen Feld gilt nach Newton (betrachte klassischen Fall: $a_0 \ll 1$) und nach zweimaliger zeitlicher

Integration

$$\Delta \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{m_e} \exp(i\omega_0 t) \quad (2.134)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{r}} = \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{im_e\omega_0} [1 - \exp(i\omega_0 t)] \quad (2.135)$$

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{im_e\omega_0} t + \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{m_e\omega_0^2} [\exp(i\omega_0 t) - 1]. \quad (2.136)$$

Um der räumlichen Abhängigkeit des elektrischen Laserfeldes, d. h. einem räumlich abhängigen Intensitätsprofil gerecht zu werden, entwickelt man das elektrische Feld in eine Taylorreihe bis zur ersten Ordnung, d. h. $\mathbf{E}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}^2(\tilde{\mathbf{r}})$. Die ponderomotorische Kraft ist die über eine Laserperiode zeitlich gemittelte Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_{\text{pond}} = -e \langle (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rangle. \quad (2.137)$$

Setzt man die Felder, die Geschwindigkeit und die Verschiebung ein, so ergibt sich

$$\mathbf{F}_{\text{pond}}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{4m_e\omega_0^2} \nabla [\mathbf{E}^2(\mathbf{r})].$$

Über $\mathbf{F}_{\text{pond}}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi_{\text{pond}}(\mathbf{r})$ ist auf natürliche Weise das ponderomotorische Potential definiert

$$\phi_{\text{pond}}(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{4m_e\omega_0^2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{e^2 I(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m_e \omega_0^2}. \quad (2.138)$$

Wegen $I(\mathbf{r}) \sim \mathbf{E}^2(\mathbf{r})$ ist die ponderomotorische Kraft proportional zum negativen Gradienten der Intensität $\mathbf{F}_{\text{pond}} \sim -\nabla I(\mathbf{r})$; der Gradient zeigt allgemein in die Richtung des steilsten Anstiegs. Das ponderomotorische Potential ist die zeitlich gemittelten kinetische Energie der Elektronen (s. Abb. 2.12).

Ponderomotorische und relativistische Selbstfokussierung

Für die ponderomotorische Kraft gilt

$$\mathbf{F}_{\text{pond}} \sim \nabla I(\mathbf{r}), \quad (2.139)$$

und der Ortsanteil des elektrischen Feldes eines Gaußstrahls (TEM₀₀-Mode) lautet gemäß (2.54)

$$E(r, z) = \frac{E_0 W_0}{W(z)} \exp[-q(z) r^2] \exp[i\varphi_r(z)], \quad (2.140)$$

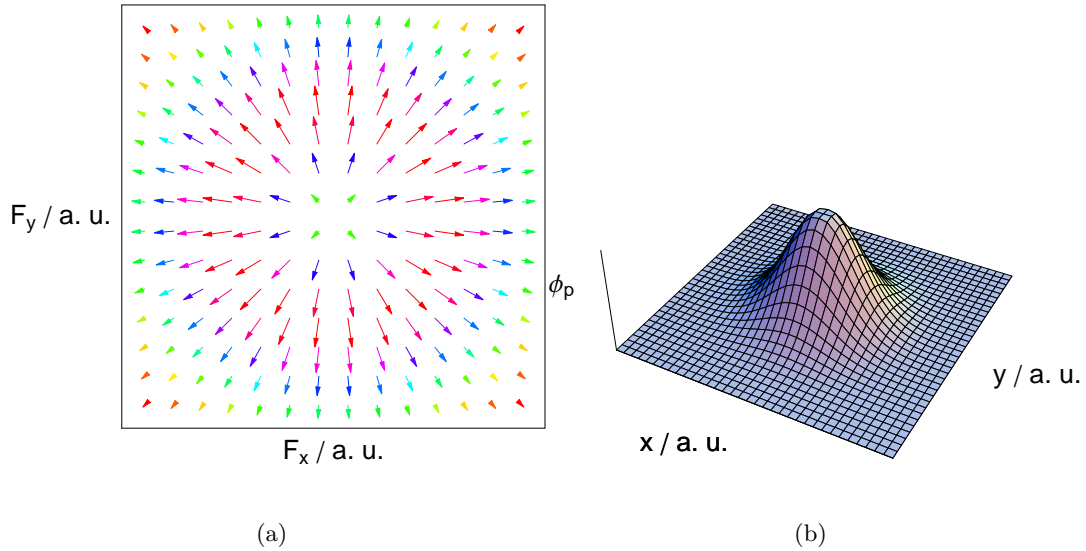


Abbildung 2.12: Ponderomotorische Kraft und ponderomotorisches Potential. Ponderomotorische Kraft (a) und ponderomotorisches Potential (b) in einer Ebene senkrecht zur optischen Achse. Als transversale Intensitätsprofil $I(x, y)$ wird eine Gauß'sche Nullmode (TEM_{00}) angenommen. Die ponderomotorische Kraft, d. h. die zeitliche gemittelte Lorentzkraft, ist proportional zum negativen Gradienten der Laserintensität. Der Gradient zeigt allgemein in die Richtung des steilsten Anstiegs. Daher drückt die ponderomotorische Kraft das Elektron in einer Ebene senkrecht zu optischen Achse radial nach außen. Das ponderomotorische Potential ist die zeitlich gemittelten kinetische Energie der Elektronen. Sie ist im Zentrum, d. h. im Fokus, am größten und nimmt nach außen hin ab. Das Elektron gleitet den Potentialberg herab. Elektronen werden aus dem Gebiet hoher Intensität herausbeschleunigt und gewinnen dabei die ponderomotorische Energie.

2 Theoretische Grundlagen

wobei $q(z) = 1/W(z)^2 + ik_0/2R(z)$ der komplexen Parameter und $\varphi_{\text{ort}}(z) = -k_0z + \tan^{-1}(z/z_0)$ die Phase sind⁸. Das Elektron erfährt die radial nach außen wirkende ponderomotorische Kraft. Sie wird berechnet, indem das Feld quadriert und der Gradient in Zylinderkoordinaten gebildet wird

$$\mathbf{F}_{\text{pond}}(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{m_e \omega_0^2} \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)} \right)^2 q(z) r \exp[-2q(z)r^2] \exp[2i\varphi_{\text{ort}}(z)] \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.141)$$

Da die Intensität mit größer werdendem radialen Abstand von der optischen Achse abnimmt, entsteht ein Intensitätsgradient, der in der x, y -Ebene radial nach innen zeigt. Die resultierende ponderomotorische Kraft zeigt in entgegengesetzte Richtung und drückt daher das Elektron radial nach außen. Im Gleichgewicht zwischen anziehender Coulombkraft und abstoßender ponderomotorischer Kraft ergibt sich das quasi-statische elektrische Feld, das in dieselbe Richtung wie die ponderomotorische Kraft zeigt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{stat}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{F}_{\text{pond}}(\mathbf{r})/e \\ &= \frac{e}{m_e \omega_0^2} \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)} \right)^2 q(z) r \exp[-2q(z)r^2] \exp[2i\varphi_{\text{ort}}(z)] \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Im Fokus, d. h. bei $z = 0$, gilt wegen $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi_{\text{ort}}(z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} W(z) = W_0$, $\lim_{z \rightarrow 0} q(z) = 1/W_0^2$ weiterhin (s. Abb. 2.13)

$$\mathbf{E}_{\text{F}}(z = 0, x, y) = \lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{E}_{\text{stat}}(\mathbf{r}) = \frac{e}{m_e \omega_0^2} \left(\frac{E_0}{W_0} \right)^2 r \exp\left(-2\frac{r^2}{W_0^2}\right) \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.143)$$

Im Abstand der halben Tailenbreite, d. h. $r_{\text{max}} = W_0/2$, ist das elektrostatische Feld im Fokus maximal

$$\mathbf{E}_{\text{F}, \text{max}} \left(r_{\text{max}} = \frac{W_0}{2} \right) = \frac{e E_0^2}{2\sqrt{e} m_e \omega_0^2 W_0}. \quad (2.144)$$

Bei einer Laserintensität von $I = 3 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$ ($E_0 = 4.8 \times 10^{12} \text{ V/m}$, s. 4.1) einer Wellenlänge von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ ($\omega_0 = 2.4 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$) und einer Fokusfläche von $A_{\text{F}} = 5 \mu\text{m}^2$ ($W_0 = 1.3 \mu\text{m}$, s. 4.1) ergibt sich $\mathbf{E}_{\text{F}, \text{max}} = 1.7 \times 10^{11} \text{ V/m}$. Die elektrische Feldstärke liegt daher im GV/cm-Bereich!

Die Elektronendichte läßt sich über den Gauß'schen Satz (Poisson- bzw. Maxwellglei-

⁸Zur Vereinfachung der Rechnung kann man von dem laufenden und nicht von dem stehenden elektrischen Feld Gauß'scher Strahlen ausgehen. In der Nähe des Fokus ist diese Beschreibung jedoch ausreichend (vgl. Abb. 2.8)

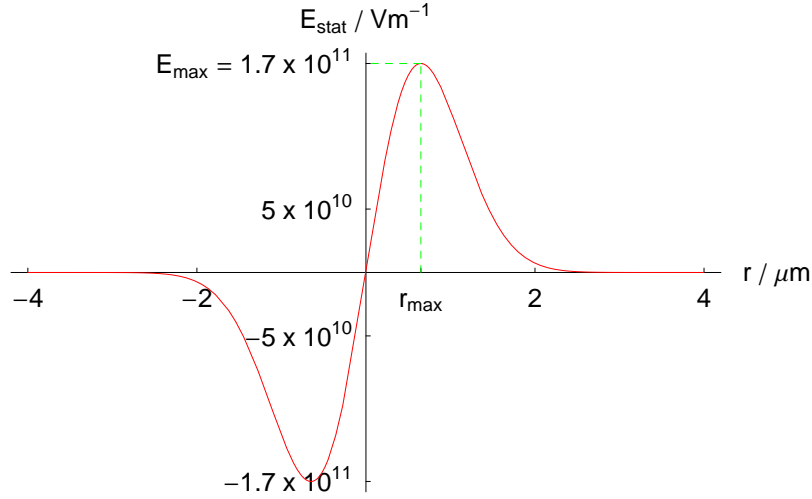


Abbildung 2.13: Quasi-statisches elektrisches Feld im ponderomotorischen Potential. Das elektrische Feld ist in Abhängigkeit des radialen Abstandes von der optischen Achse aufgetragen. Die Laserintensität beträgt $I = 3 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$, die elektrische Feldstärke $E_0 = 4.8 \times 10^{12} \text{ V/m}$, die Mittenwellenlänge des Lasers $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, die Winkelfrequenz $\omega_0 = 2.4 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$, die Wellenzahl $k_0 = 7.9 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, die Ionendichte $n_i = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, die Fokusfläche $A_F = 5 \mu\text{m}^2$, die Tailenbreite $W_0 = 1.3 \mu\text{m}$, und die z -Position ist $z = 0$. Bei der ponderomotorischen Selbstfokussierung werden die Elektronen nach außen gedrückt, während der schwereren Ionen zurückbleiben. Zwischen den Elektronen und den zurückbleibenden Ionen entsteht ein quasi-statisches elektrisches Feld. Das elektrische Feld ist auf der optischen Achse ($r = 0$) minimal ($E_{\text{stat}} = 0$) und hat im Abstand $r_{\text{max}} = 0.7 \mu\text{m}$ sein Maximum $E_{\text{stat}}(r_{\text{max}}) = 1.7 \times 10^{11} \text{ V/m}$ (grün gestrichelte Kurven). Die elektrischen Felder bei der ponderomotorischen Selbstfokussierung sind somit in der Größenordnung von $E_{\text{pond}} \simeq 10^{11} \text{ V/m}$; dies entspricht GV/cm !

2 Theoretische Grundlagen

chung: "Ladungsdichte ist Quelle des elektrischen Feldes") berechnen

$$\nabla \mathbf{E}_{\text{stat}} = \rho / \varepsilon_0, \quad (2.145)$$

wobei $\rho = e (n_i - n_e)$ die Raumladungsdichte und n_i die Ionendichte sind. Wegen

$$\nabla \mathbf{E}_{\text{stat}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{E}_{\text{stat}}) \quad (2.146)$$

folgt die reduzierte Elektronendichte $\Delta n = n_e - n_i$ und auf die Ionendichte normiert (s. Abb. 2.14)

$$\frac{\Delta n}{n_i} = \frac{2}{m_e \omega_0^2} \frac{\varepsilon_0}{n_i} \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)} \right)^2 q(z) \exp[-2q(z)r^2] \exp[2i\varphi_{\text{ort}}(z)] (-1 + 2q(z)r^2). \quad (2.147)$$

Die ponderomotorische Verdrängung der Elektronen von der optischen Achse führt zur Selbstfokussierung eines Laserpulses im Plasma. Um das zu zeigen, kann man von den Brechungsindex im Plasma ausgehen (2.130)

$$n(r) = \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega_0^2} = \sqrt{1 - n_e(r) / n_{\text{krit}}}, \quad (2.148)$$

wobei $n_e = n_e(r)$ der radial abhängige Brechungsindex und $n_{\text{krit}} = \varepsilon_0 m \omega_0^2 / e^2$ die kritische Elektronendichte sind. Bei größer werdendem Abstand von der Strahlachse wird die Elektronendichte größer $n_e(r) > n_e(0)$ und damit der Brechungsindex kleiner $n(r) < n(0)$. Der Strahl krümmt sich wie bei einer Sammellinse - bei einer Sammellinse ist der Brechungsindex auf der Strahlachse größer als am Rand - nach innen, d. h. zum optisch dichteren Medium hin. Der Laserstrahl wird konvergent und fokussiert sich selbst (ponderomotorischer Selbstfokussierung).

Um die relativistische Selbstfokussierung zu erklären, kann man von dem genäherten Lorentzfaktor (2.104) ausgehen

$$\gamma(r) \approx \sqrt{1 + a_0^2(r)/2}, \quad (2.149)$$

wobei die Laserintensität bzw. der relativistische Parameter von dem radialen Abstand abhängen soll. Die relativistische Massenzunahme des Elektrons $m \mapsto \gamma m_0 \Rightarrow \omega_p^2 \mapsto \omega_p^2 / \gamma(r)$ führt zu

$$n(r) = \sqrt{1 - \omega_p^2 / \gamma(r) \omega_0^2}. \quad (2.150)$$

Ist der Lorentzfaktor in der Mitte größer als am Rand, d. h. $\gamma(0) > \gamma(r)$, so ist auch der

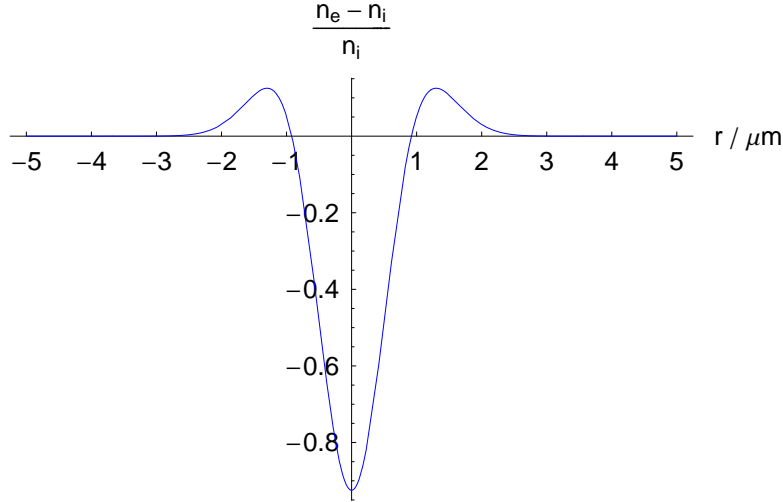


Abbildung 2.14: Elektronendichteverteilung bei der ponderomotorischen Selbstfokussierung. Die reduzierte, auf die Ionendichte normierte Elektronendichte ($n_{\text{red}} = n_e/n_i - 1$) ist gegen den radialen Abstand von der optischen Achse aufgetragen: $n_{\text{red}} = -1$ bedeutet vollständige Elektronenentleerung; $n_{\text{red}} = 0$ (Schnittpunkt mit der Abszisse) bedeutet, daß die Anzahl der Elektronen und Ionen gleich ist. Die Laserintensität beträgt $I = 3 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$, die elektrische Feldstärke $E_0 = 4.8 \times 10^{12} \text{ V/m}$, die Mittenwellenlänge des Lasers $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, die Winkelfrequenz $\omega_0 = 2.4 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$, die Wellenzahl $k_0 = 7.9 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, die Ionendichte $n_i = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, die Fokussfläche $A_F = 5 \mu\text{m}^2$, die Tailenbreite $W_0 = 1.3 \mu\text{m}$, und die z -Position liegt bei $z = 0$. Mit größer werdendem radialen Abstand nimmt die reduzierte Elektronendichte zu. Sie erreicht genau bei der Tailenbreite $W_0 = 1.3 \mu\text{m}$ ihr Maximum. Für noch größere Abstände ($r > W_0$) nähert sie sich asymptotisch der Abszisse. Auf der optischen Achse tritt fast vollständige Elektronenentleerung auf ($n_{\text{red}} \approx 90\%$). Das Elektronendichteprofil erzeugt innerhalb eines radialen Abstandes von wenigen Mikrometern von der optischen Achse ($r < 5 \mu\text{m}$) einen hohen Brechungsindexgradienten. Auf der optischen Achse ist der Brechungsindex $n = 1$.

2 Theoretische Grundlagen

Brechungsindex in der Mitte größer als am Rand, d. h. $n(0) > n(r)$; es tritt relativistische Selbstfokussierung auf.

Eine andere Argumentation geht von der Phasengeschwindigkeit des Laserpulses im Plasma aus. Die Phasengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle lautet allgemein $v_{\text{ph}} = \omega_0/k_0$. Einsetzen der klassischen Plasma-Dispersionsrelation (2.128) liefert

$$v_{\text{ph}}(r) = c \left(\frac{1}{1 - \omega_p^2/\omega_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} = c \left(\frac{1}{1 - n_e(r)/n_{\text{krit}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.151)$$

wobei $n_e = n_e(r)$ der radial abhängige Brechungsindex und $n_{\text{krit}} = \varepsilon_0 m \omega_0^2 / e^2$ die kritische Elektronendichte sind. Die relativistische Massenzunahme des Elektrons $m \mapsto \gamma m_0 \Rightarrow \omega_p^2 \mapsto \omega_p^2/\gamma(r)$ geht in die Phasengeschwindigkeit ein

$$v_{\text{ph}}(r) = c \left(\frac{1}{1 - \omega_p^2/\gamma(r) \omega_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.152)$$

und da bei größer werdendem Abstand von der Strahlachse der Lorentzfaktor und die Elektronendichte sowie wegen $\omega_p \sim \sqrt{n_e}$ auch die Plasmafrequenz größer werden, wird auch die Phasengeschwindigkeit größer, d. h. $v_{\text{ph}}(r) > v_{\text{ph}}(0)$. Ist die Phasengeschwindigkeit des Laserpulses, welcher sich in z -Richtung ausbreitet, am Rand größer ist als in der Nähe der optischen Achse, so krümmt sich die Wellenfront nach innen. Der Strahl wird wieder konvergent.

Die relativistische Selbstfokussierung ein nichtlinearer optischer Effekt ist. Um dies zu verdeutlichen, entwickelt man den Brechungsindex unter der Wurzel (nur gültig für ein unterdichtetes Plasma: $\omega_0 > \omega_p$)

$$n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\gamma \omega_0^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\gamma \omega_0^2} \quad (2.153)$$

und setzt den genäherten Lorentzfaktor (2.104) ein⁹

$$\begin{aligned} n &\approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{a_0^2}{4} \right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{8} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} a_0^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{64} \frac{\omega_p^2 \lambda_0^4}{\varepsilon_0 \pi^4 c^7} \left(\frac{e}{m_e} \right)^2 I. \end{aligned} \quad (2.154)$$

⁹Potenzreihenentwicklung: $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ und $1/\sqrt{1+x} \approx 1 - x/2$.

2 Theoretische Grundlagen

Dies lässt sich schreiben als

$$n = n_1 + n_2 I, \quad (2.155)$$

wobei n_1 der lineare und $n_2 = \omega_p^2 \lambda_0^4 (e/m_e)^2 / 64 \epsilon_0 \pi^4 c^7$ der nichtlineare Brechungsindex sind. Die obige Herleitung gilt nur für schwach relativistische Intensitäten ($a_0 \lesssim \sqrt{2}$). Beugung und Ionisation wirken der (Selbst-)Fokussierung entgegen. Für die Selbstfokussierung ist daher eine kritische Leistung zu überschreiten.

Kritische Leistung für Selbstfokussierung

Die kritische Leistung, welche zur Selbstfokussierung eines Laserpulses in einem Plasma führt, ist - bei genauer Betrachtung der nichtlinearen Laser-Plasma-Wechselwirkung und unter Berücksichtigung defokussierender Effekte - gegeben durch [28]

$$P_{\text{krit}} = 16.2 \frac{n_{\text{krit}}}{n_e} \text{ GW}. \quad (2.156)$$

Setzt man die Elektronendichte $n_e = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ (s. Kap. 2.3.2) und die kritische Dichte $n_{\text{krit}} = 1.7 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ (bei einer Zentralwellenlänge des Lasers von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$) ein, so erhält man eine kritische Leistung von $P_{\text{krit}} = 0.55 \text{ TW}$. Bei bereitgestellten Pulsenergien von 50 mJ bzw. 100 mJ (s. Kap. 2.3.2) sowie einer Pulsdauer von 100 fs (s. Kap. 2.3.2) ergeben sich Laserleistungen von $P_0 = 0.50 \text{ TW}$ bzw. $P_0 = 1 \text{ TW}$. D. h. Nur im zweiten Fall ist die kritische Leistung überschritten - Selbstfokussierung findet daher statt.

2.3.2 Gasdichtemessungen

Breitet sich der Laserpuls im Plasma aus, so erfährt er eine Phasenverschiebung. Aus der (integralen) Phasenverschiebung lässt sich der Brechungsindex bestimmen. Die Phasenänderung, die der Puls erfährt, ist gegeben durch

$$\Delta\phi = \int (k_p - k_0) ds = \frac{\omega_0}{c} \int (n - 1) ds, \quad (2.157)$$

wobei $k_0 = \omega_0/c$ die Wellenzahl im freien Raum, n der Brechungsindex und $k_p = n\omega_p/c$ die Wellenzahl des Laserpulses im Plasma sind. Die Ausdehnung des Plasmas legt das Integrationsgebiet fest. Die Phasenverschiebung ist die über den Weg integrierte Elektronendichte, und der Integrationsweg ist der Weg, den der Laserpuls durch das Plasma zurücklegt. Entwickelt man den Brechungsindex (2.130), so findet man den vereinfachten Ausdruck

$$n \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{n_e}{n_{\text{krit}}}. \quad (2.158)$$

2 Theoretische Grundlagen

Einsetzen in die Phasenverschiebung ergibt

$$\Delta\phi = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{n_{\text{krit}} c} \int n_e ds. \quad (2.159)$$

Aus der gemessenen Phasenverschiebung, welche aus Interferogrammen ermittelt wird, läßt sich der Brechungsindex im Plasma bestimmen [29, 30].

Zur Auswertung geht man von einer zylindrischen Symmetrie des Plasma aus, wobei die Düsenachse die Symmetrieachse des Zylinders ist (Radius: R), und legt ein zweidimensionales Koordinatensystem in den Zylinder - der Ursprung liegt auf der Düsenachse. Es wird vorausgesetzt, daß die Strahlen im Plasma keine Ablenkung erfahren. Zur Berechnung der Phasenverschiebung betrachtet man einen unendlich dünnen Probestrahl, welcher in x -Richtung durch das Plasma läuft und den Zylinder an zwei Punkten S_1 und S_2 schneidet. Die Phasenverschiebung ϕ ergibt sich, indem in x -Richtung über die Strecke $\overline{S_1 S_2}$ integriert wird

$$\phi = \frac{\omega_0}{c} \int_{S_1}^{S_2} (n - 1) ds \quad (2.160)$$

Der Satz des Pythagoras liefert

$$\phi(y) = \frac{\omega_0}{c} \int_{-(R^2-y^2)^{1/2}}^{(R^2-y^2)^{1/2}} [n(x) - 1] dx \quad (2.161)$$

Die Phasenverschiebung ist von der y -Koordinate $\Delta\phi = \Delta\phi(y)$ und der Brechungsindex von der x -Koordinate $n = n(x)$ abhängig. Schreibt man auf Zylinderkoordinaten um, so erhält man die Abel'sche Integralgleichung

$$\phi(y) = 2 \frac{\omega_0}{c} \int_y^R [n(r) - 1] \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - y^2}} \quad (2.162)$$

$\Delta\phi(y)$ heißt Abeltransformierte von $2[n(r) - 1]\omega_0/c$. Abelinversion liefert [29]

$$2 \frac{\omega_0}{c} [n - 1] = -\frac{1}{\pi} \int_y^R \frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - r^2}}. \quad (2.163)$$

Löst man dies auf, so erhält man

$$n - 1 = -\frac{\lambda_0}{4\pi^2} \int_y^R \frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - r^2}} \quad (2.164)$$

Die Auswertung mit der Software "IDEA" [31] liefert schließlich die Werte für den Bre-

2 Theoretische Grundlagen

chungsindex $n - 1$. Mit dem Brechungsindex für Stickstoff $n_{\text{Stick}} = 1.000298$ bei einem Druck von 1 bar gilt andererseits

$$n - 1|_{1 \text{ bar}} = 3 \times 10^{-4}. \quad (2.165)$$

Das Verhältnis der obigen Ausdrücke liefert den Druck p . Über die allgemeine Gasgleichung

$$p = n_{\text{gas}} k T, \quad (2.166)$$

wobei n_{gas} die Gasdichte, k_B die Boltzmann-Konstante und T die absolute Temperatur sind, ergibt sich schließlich die Gasdichte $n_{\text{gas}} = p/k_B T$. Für Zimmertemperatur, d. h. $k_B T = 1/40 \text{ eV}$, gilt somit

$$n_{\text{gas}} [\text{cm}^{-3}] = 2.5 \times 10^{19} p [\text{bar}]. \quad (2.167)$$

2.3.3 Lasergetriebene Plasmawelle

Breitet sich ein Laserpuls in z -Richtung aus, so kann er über sein (longitudinales, nicht transversales) Intensitätsprofil, d. h. $I = I(z)$, eine Plasmawelle anregen. Um dies zu verstehen, soll ein einzelnes Elektron betrachtet werden, welches sich zum Zeitpunkt $t = 0$ auf der optischen Achse ($r = 0$) befindet und den Laserpuls auf sich zulaufen sieht. Das Elektron gerät zunächst in die ansteigenden Intensitätsflanke des Pulses und wird durch die ponderomotorischen Kraft, die in Richtung der steilsten Intensitätsabnahme zeigt, nach hinten gedrückt. Da die schweren Ionen vorne zurückbleiben, zieht die Coulombkraft die Elektronen nach vorne. Gleichzeitig überholt der Laserpuls das Elektron, welches auf der absteigenden Intensitätsflanke nach vorne herab gleitet - wie ein Skifahrer, der einen Abhang hinunterfährt. Geschieht dies in Phase mit der Coulombkraft, so erhält das Elektron einen Stoß nach vorne. Dadurch kann die Schwingung des Elektrons, welches gegen den positiv geladenen Hintergrund der trägen Ionen schwingt, resonant angeregt werden. In einem Plasma ist das Elektron jedoch nicht allein, sondern es gibt viele Elektronen. Der Laserpuls, der durch das Plasma läuft, regt die Plasmaelektronen nacheinander an - wie ein Schiff, das eine Kielwelle hinter sich her zieht (engl. : "wake field"). Es entsteht eine Elektronendichteoszillation, die dem Laserpuls mit seiner Phasengeschwindigkeit hinterher läuft; das Ergebnis ist eine Plasmawelle.

Die Resonanzbedingung dafür, daß ein Plasmaelektron gerade zwei Stöße in entgegengesetzter Richtungen erhält, lautet $\tau_L = \tau_p/2$, wobei τ_L die Pulsdauer des Lasers und τ_p die Dauer der Plasmaschwingung sind [2]. Das zeitliche Profil des Lasers lautet

2 Theoretische Grundlagen

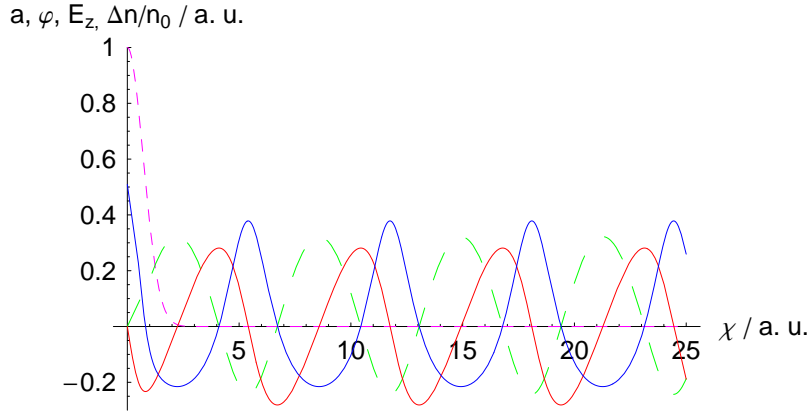


Abbildung 2.15: Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ niedrigerer Laserintensität. Laserpuls (violett), Potential der Plasmawelle (grün), longitudinale Komponente des elektrischen Feldes (rot) und Elektronendichteveriation (blau) für $a_0 = 1$. Parameter: $\gamma_g = 10$; $\sigma = 1$.

(s. Anh. 7.13)

$$a(\chi) = a_0^2 \exp \left[- \left(\frac{\chi}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (2.168)$$

wobei $\chi = k_p v_g (t - z/v_g)$ und $\sigma = k_p v_g \tau_{g0}$ dimensionslose Parameter und $k_p = \omega_p/c$ die Wellenzahl des Plasmas sind. Die Elektronendichteoszillation ist mit einem Potential bzw. einem longitudinalen elektrischen Feld (E_z) verbunden. Das elektrische Potential kann durch die Poissongleichung beschrieben werden (s. Anh. 7.13)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi^2} = \gamma_g^2 \left[\frac{\sqrt{1 - \gamma_g^{-2}}}{\sqrt{1 - \frac{1+a^2}{\gamma_g^2(1+\varphi)^2}}} - 1 \right], \quad (2.169)$$

wobei $\gamma_g = (1 - \beta_g)^{-1/2}$ der Lorentzfaktor, $\beta_g = v_g/c$ der Betafaktor und v_g die Gruppengeschwindigkeit sind. Es liefert das longitudinale elektrische Feld gemäß $E_z(\chi) = -\partial\varphi/\partial\chi$. Die Elektronendichteveriation berechnet man über (s. Anh. 7.13)

$$\Delta n/n_0 = \frac{n - n_0}{n_0} = \tilde{n} - 1, \quad \tilde{n} = \gamma_g^2 \beta_g \left[(1 - \gamma_g^{-2} \psi^{-2})^{-1/2} - \beta_g \right]. \quad (2.170)$$

Die Abbildungen 2.15 und 2.16 zeigen lasergetriebene Plasmawellen für zwei verschiede-

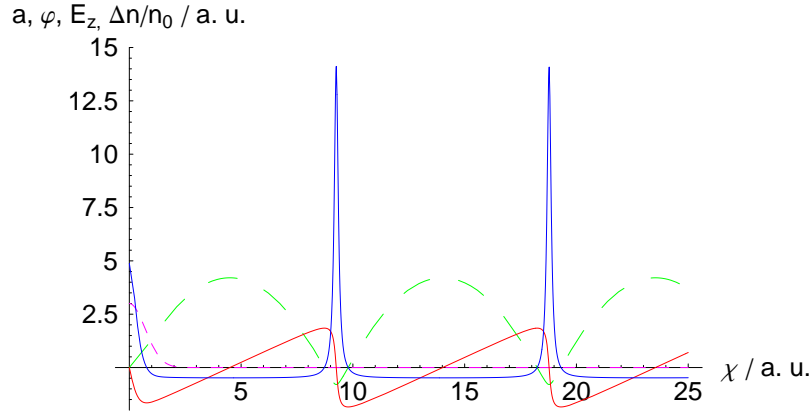


Abbildung 2.16: Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ hoher Laserintensität. Laserpuls (violett), Potential der Plasmawelle (grün), longitudinale Komponente des elektrischen Feldes (rot) und Elektronendichteveränderung (blau) für $a_0 = 3$ (b). Parameter: $\gamma_g = 10$; $\sigma = 1$.

ne Intensitäten. Es zeigt sich, daß sowohl die Oszillationsamplitude als auch die Periode der Plasmawelle bei höherer Laserintensität größer werden. Außerdem verläuft das longitudinale elektrische Feld stufenförmiger, bis die Welle schließlich bricht (engl. : "wave breaking"). Die Elektronen reiten auf der brechenden Plasmawelle und werden in longitudinale Richtung beschleunigt. Im folgenden soll kurz die laserinduzierte Elektronenbeschleunigung beschrieben werden.

Laserinduzierte Elektronenbeschleunigung

Es gibt im wesentlichen zwei Mechanismen, die zur laserinduzierten Elektronenbeschleunigung führen können:

- Prinzip der Laserbeschleunigung in einer Plasma-Kielwelle (engl. : "*Laser Wake Field Acceleration*") [32, 33]: Die ponderomotorische Kraft, die durch das longitudinale Intensitätsprofil des Laserpulses entsteht, regt die Plasmawelle an. Die Plasmawelle führt zu einer longitudinalen Elektronendichteverteilung, die ein longitudinales elektrisches Feld produziert. Das longitudinale elektrische Feld beschleunigt die Elektronen, welche sich in einem relativistischen Kanal befinden.
- Prinzip der direkten Laserbeschleunigung (engl. : "*Direct Laser Acceleration*") [34, 35]: Der beschleunigte Elektronenstrahl kann als Strom interpretiert werden, der von radialen elektrischen Feldern und azimuthalen Magnetfeldern umgeben ist. Die

2 Theoretische Grundlagen

unmittelbare Wechselwirkung zwischen den elektromagnetischen Feldern führt zu einer Beschleunigung der Plasmaelektronen in z -Richtung.

3 Experimenteller Aufbau

In diesem Kapitel wird der experimentelle Aufbau beschrieben. Dazu wird das Lasersystem charakterisiert, welches in der Lage ist, Laserpulse mit relativistischen Intensitäten zu erzeugen (s. Kap. 3.1). Weiterhin werden die technischen Einzelheiten der Meßanordnung ausführlich dargestellt (s. Kap. 3.2).

3.1 Lasersystem

Die experimentellen Messungen wurden mit dem Hochleistungslasersystem am IOQ Jena (Abk. : *Institut für Optik und Quantenelektronik Jena*) durchgeführt (s. Abb. 3.1). Der Jenaer Laser ist ein Festkörperlaser, der Ti:Sa-Kristalle (Titan:Sapphir) als aktives Medium benutzt, und kurze Laserpulse ($\tau_p \sim 100$ fs) erzeugt. Mittels CPA-Technik (engl. : "chirped pulse amplification technique") werden diese verstärkt. Die erreichte Energie bzw. Leistung beträgt 1J bzw. 10...15 TW. Als Oszillator dient ein kommerziellen Laser ("Tsunami", Firma: Spectra Physics), dessen Ti:Sa-Kristall mittels eines dioden-gepumpten, frequenzverdoppelten Nd : YVO₄-Lasers gepumpt wird (Neodym:Yttrium-Vanadium-Oxid: 5.5 W Leistung bei einer Wellenlänge von 532nm im Dauerstrichbetrieb). Der Oszillator erzeugt durch Kerr-Linsen-Modenkopplung ultrakurze Laserpulse (45 fs) mit einer Wiederholrate von 80 MHz (bei einer Zentralwellenlänge von 795 nm, einer spektralen Bandbreite von 23 nm und einer Pulsenergie von 10 nJ).

Es soll kurz die minimale Pulsdauer abgeschätzt werden, welche mit diesem Oszillator erreichbar ist: Für das minimale Produkt aus Pulsdauer und spektraler Bandbreite gilt allgemein (Heisenberg'sche Unschärferelation)

$$\tau_p \Delta\omega_p \geq 2\pi\tilde{c}, \quad (3.1)$$

wobei \tilde{c} eine Konstante ist, die von der jeweiligen Pulsform abhängig ist. Für eine Gauß'sche Feldeinhüllende gelten die Beziehungen $\tau_G \geq 2.355/\Delta\omega_p$ und $\tau_p = 1.177 \tau_G$ (FWHM) [24]; bei der spektralen Bandbreite $\Delta\lambda_{\text{FWHM}} = 23$ nm ergibt sich wegen $\Delta\omega_{p,\text{FWHM}} = 2\pi c \Delta\lambda_{\text{FWHM}}/\lambda_0^2 \approx 6.9 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$ eine minimale FWHM-Pulsdauer von $\tau_{p,\text{FWHM}} \approx 40$ nm.

3 Experimenteller Aufbau

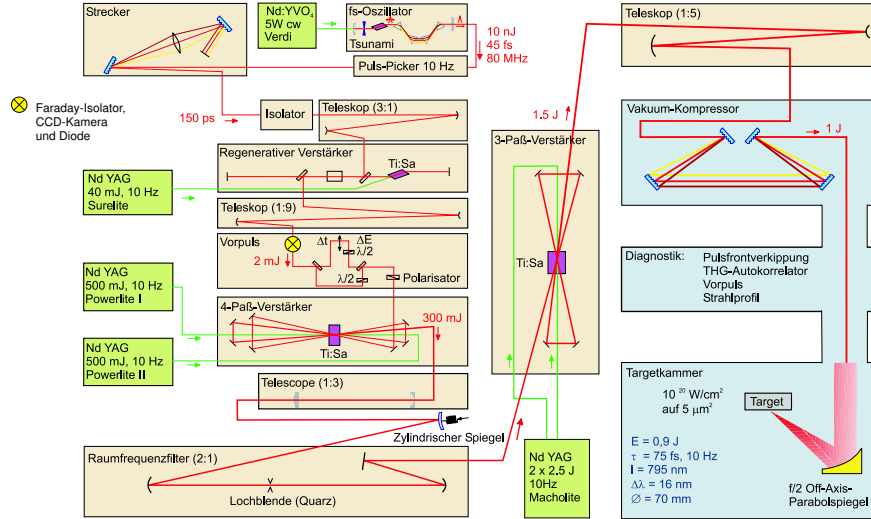


Abbildung 3.1: Jenaer Lasersystem. Ti:Sa-Lasersystem mit eingebautem Faraday-Isolator. Das Lasersystem besteht im wesentlichen aus einem Oszillator, einem regenerativen Verstärker und zwei nachfolgenden Verstärkerstufen - nach der Verstärkung erreichen die Pulse unter bestmöglichen Bedingungen Energien von 2mJ, 300 mJ bzw. 1.5 J (E_p). Nach der Kompression (blau unterlegter Bereich) verkürzt sich ihre Pulsdauer auf $\tau_p \gtrsim 80$ fs. Ein Parabolspiegel bündelt sie auf eine Fokusfläche von $A_F \gtrsim 5 \mu\text{m}^2$. Die Laserintensität beträgt höchstens $I = E_p / \tau_p A_F \simeq 10^{20} \text{ W/cm}^2$ (vgl. relativistische Intensität: $I_{\text{rel}} = 2.2 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$). Das Lasersystem arbeitet nach dem CPA-Prinzip ("chirped pulse amplification"). Die Laserpulse lassen sich hinsichtlich ihrer Pulsfrontverkipfung, ihres räumlichen Strahlprofils sowie ihrer Pulsdauer, -struktur (klassischer Autokorrektor dritter Ordnung) und -energie (Energienmeßgerät) charakterisieren. Ein eingebauter Faraday-Isolator mit einer Apertur von 20 mm (gelber Kreis mit Kreuz) schützt den regenerativen Verstärker vor zurücklaufenden Laserpulsen -auf dem Rückweg durch das Lasersystem werden diese verstärkt und durch das 1 : 9-Teleskop gebündelt.

3 Experimenteller Aufbau

Die 80 Millionen Pulse je Sekunde, welche der Oszillator liefert, können nicht unmittelbar verstärkt werden - bei einer unmittelbaren Verstärkung auf eine Energie von 1 J entspräche dies einer Lichtleistung von 0.1 GW -, da dies zu unerwünschten nichtlinearen optischen Prozessen wie Selbstphasenmodulation und Selbstfokussierung sowie zu einer überhöhten thermischen Belastung und dadurch irreversibler Zerstörung der Verstärkerkristalle führen würde. Daher greift sich ein Pockelszelle (engl. : "pulse picker"), kombiniert mit einem Polarisationsfilter, nur jeden acht Millionstel Puls heraus und verringert dadurch die Wiederholrate auf gemäßigte 10 Hz. Bei dieser Wiederholrate werden die Laserpulse nun verstärkt.

Damit die Intensität unterhalb der Zerstörschwellen der Optiken bleibt, werden die Pulse in der Zeit gestreckt; eine zeitliche Verlängerung bewirkt eine niedrigere Intensität ($I \sim 1/\tau_p$). Zur zeitlichen Verlängerung dient ein Gitterstrecker: Dieser besteht im wesentlichen aus zwei parallel stehenden Gitterpaaren. Am ersten Gitterpaar wird der spektral breite Oszillatorpuls ($\Delta\lambda_{\text{FWHM}} = 20 \text{ nm}$) in seine einzelnen Spektralkomponenten zerlegt und durch das zweite Gitterpaar wieder kollimiert. Dies geschieht jeweils durch Reflexion und Dispersion am Gitter. Der Strahlengang wird so eingestellt, daß die kürzerwelligen Farben eine längere Wegstrecke als die längerwelligen durchlaufen und somit gegenüber diesen verzögert sind, d. h. die niederfrequenten Anteile des Pulses verlassen den Strecker früher als die höherfrequenten ("rot vor blau" bzw. Up-Chirp); die Pulsdauer ist schließlich auf 150 ps verlängert.

Ein Faraday-Isolator, der aus einem Faraday-Rotator und einem $\lambda/4$ -Plättchen besteht, verhindert, daß Licht in den Oszillator rückkoppelt und die empfindliche Modenkopplung stört bzw. unterbricht. Eine Pockelszelle koppelt den zeitlich gestreckten Oszillatorpuls (engl. : "seed pulse") in den Resonator des sog. regenerativen Verstärkers ein. Dort läuft er so lange um, bis eine Sättigung der Verstärkung eintritt - nach etwa 20 Umläufen im Resonator. Eine Pockelszelle schaltet den verstärkten Puls, welcher schließlich eine Energie von etwa 2 mJ besitzt, heraus. Ein 1:9-Teleskop weitet den Strahl auf, wobei der Strahldurchmesser von 1 mm auf 9 mm wächst. Die Strahlaufweitung, d. h. die Vergrößerung des Strahlquerschnitts (A_q), dient dazu, die Intensität zu verringern und unterhalb der Zerstörschwellen der Optiken zu bleiben ($I \sim 1/A_q$).

Das Lasersystem bietet die Möglichkeit, einen Vorpuls einzustellen. Vorpulse erreichen ihr Zielobjekt (engl. : "target") früher als der Hauptpuls. Um einen Vorpuls zu erzeugen, wird der Laserpuls in Haupt- und Vorpuls aufgespalten. Durch $\lambda/2$ -Platten und geeignete Polarisatoren lassen sich die Vor- sowie die Hauptpulsenergie regeln. Im Lichtweg des Vorpulses befindet sich ein motorisierter Spiegel, welcher einen eindeutigen Gang- und somit Zeitunterschied zwischen Vor- und Hauptpuls einführt.

3 Experimenteller Aufbau

Die Verstärkung findet in drei Stufen statt: die erste Verstärkerstufe - der regenerative Verstärker ist bereits beschrieben. Die zweite und die dritte Verstärkerstufe sind Vielpaß-Verstärker (engl. : "multi pass amplifier"); das bedeutet, daß der Laserpuls in einer bestimmten Spiegelanordnung mehrere Male durch die jeweiligen Ti:Sa-Verstärkerkristalle läuft. Der Strahlengang durch die Verstärkerkristalle erinnert an die Form von Schmetterlingsflügeln, daher auch der englische Name "butterfly amplifier". Im 4-Paß-Verstärker wird der Laserpuls auf 300 mJ und im 3-Paß-Verstärker auf höchstens 1.5 J verstärkt. Zwischen den beiden Multi-Paß-Verstärkern befindet sich ein Modenreinigungsteleskop, in dessen Fokus eine Quarzblende sitzt, welche den Strahl von hohen Ortsfrequenzen befreit (sog. räumliche Modenfilterung). Indem der Puls um den 3-Paß-Verstärker herumgeleitet wird, läßt sich die letzte Verstärkerstufe umgehen. Um Besetzungsinversion in den Verstärkerkristallen aufzubauen, werden diese von frequenzverdoppelten, gütegeschalteten Nd : YAG-Lasern gepumpt (blitzlampengepumpte Neodym-Yttrium-Aluminium-Granat Laser bei einer Wellenlänge von 532 nm). Ihre Phase ist dabei fest an das 10 Hz-Triggersignal des Oszillators gekoppelt.

Der verstärkte Puls wird schließlich durch ein 1:5-Teleskop auf einen Strahldurchmesser von etwa 5 cm aufgeweitet und durchläuft einen Gitterkompressor - das Gegenstück zu einem Strecker. Der Kompressor prägt dem Puls durch anormale Dispersion einen Down-Chirp auf, d. h. er gleicht die Laufzeitunterschiede der verschiedenen Farben, die im Strecker erzeugt werden, wieder aus. Dadurch verkürzt sich der Puls fast wieder auf seine ursprüngliche Pulsdauer von etwa 80 fs (FWHM). Die Pulse können nicht ganz auf die ursprüngliche Pulsdauer verkürzt werden, da sich die spektrale Bandbreite beim Durchgang durch die Verstärkerkristalle reduziert (engl. : "gain narrowing"). Die Transmittivität des Kompressors liegt bei 60 ... 70 %. Der Kompressor und die Strahlführung (engl. : "beam line") zur Kammer, in welcher sich die Meßanordnung befindet, ist evakuiert. Dies ist erforderlich, da die Pulse dort bereits eine so hohe Leistung besitzen, daß sie mit der Luft wechselwirken würden. Dadurch würde die Strahlqualität, d. h. das räumliche homogene Strahlprofil, leiden und sich die Ausbreitung möglicherweise ändern.

Die Pulsdauer und die -form werden mit einem Dritte-Ordnung Autokorrelator untersucht. Dieser besitzt gegenüber einem Autokorrelator zweiter Ordnung den Vorteil, daß Vorpulse von Nachpulsen unterschieden werden können (Vorpulse sind Pulse, die dem Hauptpuls zeitlich vorausseilen und Nachpulse die, die hinterherlaufen). Die Verkipfung der Pulsfront wird mit einem veränderten Michelson-Interferometer detektiert. Der Laserpuls ist eine Lichtscheibe mit einer Dicke von etwa $30\text{ }\mu\text{m}$ ($100\text{ fs} \hat{=} 30\text{ }\mu\text{m}$) und einem Durchmesser von etwa 5 cm; die Normale der Lichtscheibe zeigt in Ausbreitungsrichtung des Pulses. Ist die Pulsfront verkippt, so liegt die Normale nicht parallel zur

3 Experimenteller Aufbau

Pulsenergie	Pulsdauer	Fokusfläche	Zentralwellenlänge	Intensität
$\lesssim 1 \text{ J}$	$\gtrsim 80 \text{ fs}$	$\gtrsim 5 \mu\text{m}^2$	795 nm	$\lesssim 10^{20} \text{ W/cm}^2$

Tabelle 3.1: Bestmögliche Pulseigenschaften.

Ausbreitungsrichtung. Eine Pulsfrontverkipfung führt zu einer effektiven Verlängerung der Pulsdauer. Durch Verstellen der Kompressorgitter wird die Lichtscheibe wieder gerade gestellt. Die Pulse gelangen schließlich über die Beamline in die Vakuumkammer und treffen auf einen "off-axis"- Parabolspiegel, welcher sie fokussiert. Es ist vorteilhaft, einen Parabolspiegel in Reflexion zu verwenden, da dadurch ein großer Strahlquerschnitt des spektral breiten Pulses wellenlängenunabhängig, d. h. chromatisch fehlerfrei, abgebildet werden kann. Auf diese Weise bleibt der Brennpunkt und somit die Fokusfläche klein.

Bei bester Fokussierung auf eine Fokusfläche von etwa $5 \mu\text{m}^2$ und bei einer Pulsdauer von $\tau_p \sim 100 \text{ fs}$ sind Laserintensitäten von bis zu 10^{20} W/cm^2 erreichbar. Die wichtigsten Parameter sind in Tab. 3.1 zusammengefaßt.

3.1.1 Faraday-Isolator

Aufgrund der Symmetrie des Aufbaus (s. Abb. 3.4) laufen Laserpulse direkt in das Lasersystem zurück. Um das Lasersystem zu schützen, wurde daher ein zusätzlicher Faraday-Isolator eingebaut, welcher zurücklaufenden Laserpulse den Weg versperrt (s. Abb. 3.2). Ein zurücklaufender Puls läuft rückwärts durch die 3- und den 4-Paß-Verstärker und wird dabei verstärkt - genau wie ein gewöhnlicher Puls, welcher in Vorwärtsrichtung läuft. Es wird kritisch, falls die Laserpulse auf dem Rückweg nicht nur verstärkt, sondern auch fokussiert werden! Das 1 : 9-Teleskop vor dem regenerativen Verstärker verringert den Strahldurchmesser um das neunfache (von 9 mm auf 1 mm). Da der Strahldurchmesser quadratisch in die Querschnittsfläche (A_q) eingeht, und diese umgekehrt proportional zur Intensität $I \sim 1/A_q$ ist, vergrößert sich die Intensität etwa um das hundertfache, so daß die Optiken des empfindlichen, regenerativen Verstärkers gefährdet sind. Um den regenerativen Verstärker zu schützen, wurde der Faraday-Isolator daher im aufgeweiteten Strahl vor dem 1:9-Teleskop eingebaut.

Ein Faraday arbeitet im allgemeinen so, daß ein Polarisator in einer ausgezeichneten Richtung linear polarisiertes Licht hindurch läßt, dessen Polarisationsvektor anschließend mittels eines Faraday-Drehers um 45° gedreht wird. Die Durchlaßrichtung eines nachfolgenden Analysator ist um 45° gegenüber derjenigen des Polarisators gedreht, so daß Licht, welches vom Polarisator kommt, hindurchtreten kann. In Rückwärtsrichtung wird das Licht durch den Faraday-Dreher in die gleiche Richtung wie vorher gedreht. Da

3 Experimenteller Aufbau

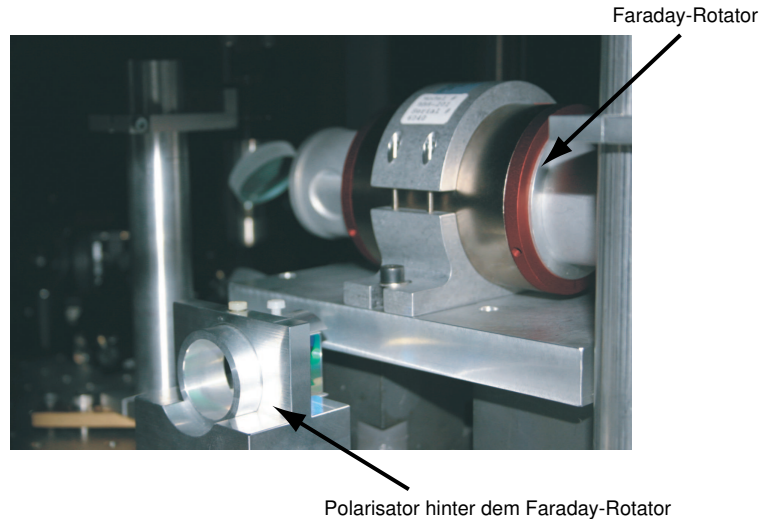


Abbildung 3.2: Eingebauter Faraday-Isolator. Dieses Foto zeigt den Faraday-Isolator mit einer Apertur von 20 mm, der zurücklaufende Pulse blockiert. Der Faraday-Isolator und der Polarisatorwürfel sind gekennzeichnet.

es nun um 90° gegenüber der Durchlaßrichtung des Polarisators linear polarisiert ist, wird es vollständig blockiert. Die Wirkungsweise des Faraday-Isolators beruht auf dem Faraday-Effekt: Als Faraday-Effekt bezeichnet man die Drehung der Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht. Durch einen Stromfluß in einer Spule wird ein homogenes Magnetfeld erzeugt, welches die Drehung der Polarisationssebene bewirkt. Der Drehwinkel ist dabei proportional zur magnetischen Feldstärke, und der Drehsinn stimmt mit der Richtung des Stromflusses in der Spule überein. Das wesentliche ist, daß der Drehsinn unabhängig von der Richtung des hindurchtretenden Lichtes gleich ist, wobei der Drehsinn einer $\lambda/4$ -Platte hingegen richtungsabhängig ist. Im folgenden wird zwischen positivem (+) und negativem (–) Drehsinn unterschieden.

Der eingebaute Faraday-Isolator (Firma: "Electro-Optics Technology", Typ: "BB8-81") besteht u. a. aus einem Polarisator und einem Faraday-Rotator (Faraday-Dreher aus Quarzkristall), welcher die Polarisationssebene eines einfallenden Pulses um 45° (+) dreht. Dahinter befindet sich eine $\lambda/4$ -Platte, die zusammen mit einem zweiten Polarisator als Analysator wirkt. Die beiden Polarisatoren befinden sich in gekreuzter Stellung zueinander, d. h. die Durchlaßrichtungen unterscheiden sich um 90° . Die $\lambda/4$ -Platte dreht die Polarisationssebene des Pulses in die gleiche Richtung (+) wie der Faraday-Rotator weiter, und der zweite Polarisator läßt ihn passieren. Ein in Vorwärtsrichtung laufender p-polarisierter (parallel polarisierter) Puls verläßt den Faraday-Isolator somit

3 Experimenteller Aufbau

s-polarisiert (senkrecht polarisiert). Ein nachfolgendes Periskop dreht seine Polarisation wieder um 90° , so daß er schließlich wieder p-polarisiert ist. Auf dem Rückweg durch den Faraday-Isolator ist die Situation anders: Der p-polarisierte Puls wird durch das Periskop um 90° gedreht, so daß er s-polarisiert ist. Der s-polarisierte Puls geht durch den zweiten Polarisator, die $\lambda/4$ -Platte dreht seine Polarisationsebene um 45° ($-$), und der Faraday-Rotator dreht sie wieder zurück ($+$). Der Puls bleibt s-polarisiert und fliegt am ersten Polarisator heraus. D. h. Der Faraday-Isolator läßt nur Pulse in Vorwärts-, aber nicht in Rückwärtsrichtung passieren und dient daher als optischer Isolator - wie eine Halbleiterdiode, die in Sperrichtung als Isolator und in Durchlaßrichtung als Leiter wirkt. Der Faraday-Isolator ist spektral breitbandig ($\Delta\lambda = -100/+150$ nm) und besitzt eine Apertur von 20 mm. Bei einer Zentralwellenlänge von 800 nm beträgt seine Transmission 93 % und seine Isolationswirkung 30 dB.

Das am ersten Polarisator ausgekoppelte Licht wird mit einer CCD-Kamera beobachtet. Dies ist nötig, um das Signal zurücklaufender Pulse während der Experimente beobachten und kontrollieren zu können (s. Abb. 3.3). Es fällt auf, daß das zurücklaufende Signal, falls zwei gegenläufige Pulse im Zweistrahlexperiment fokussiert werden, um Größenordnungen höher ist als das reflektierte Signal, welches bei üblichen Meßanordnungen mit nur einem Puls reflektiert wird. Die Schicht, mit der die Bestandteile des ersten Polarisator zusammengeklebt waren, wurde während der Experimente nach einigen tausend Laserschüssen zerstört. Aus dem hohen Signal der zurücklaufenden Pulse läßt sich schließen, daß diese eine nicht zu unterschätzende Intensität besitzen. Mit Polarisatoren, welche nicht zusammengeklebt werden, sondern einen Luftspalt besitzen, sollte die Zerstörschwelle viel höher sein.

Zur Abschätzung der Stärke des zurücklaufenden Pulses diene Laserpapier (engl. : "laser burn paper"), welches sich entsprechend auftreffender Laserintensität schwärzt. Bei einer Energie von 20 mJ war das Signal eines einzigen Laserschusses in Vorwärtsrichtung vergleichbar mit dem Signal von 10 Laserschüssen in Rückwärtsrichtung. Unter der Annahme, daß sich das Papier linear mit der Anzahl der Laserschüsse schwärzt, ist das Signal in Rückwärtsrichtung etwa zehnmal so schwach wie das Signal in Vorwärtsrichtung. Das bedeutet, daß während dieser einzelnen Messung der rückwärtslaufende Laserpuls an der Stelle des Isolators, d. h. vor der Fokussierung durch das 1 : 9-Teleskop, unkritisch für das Lasersystem war.

Kritisch ist allerdings die relativistische Autokorrelationsmessung, wobei die Foki entlang der optischen Achse, d. h. in z -Richtung, verschoben werden (s. 4.19): Liegen die Foki auseinander, d. h. liegt der Fokus des einen Parabolspiegels jeweils außerhalb der Brennweite des anderen, so divergiert der Laserstrahl auf dem Rückweg durch das La-

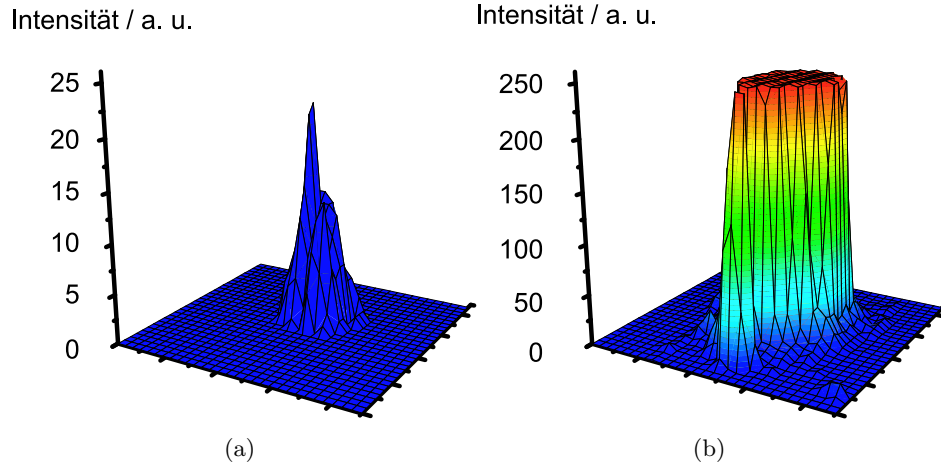


Abbildung 3.3: Zurücklaufender Laserpuls. Mittels einer Diode aufgenommene Intensität des zurücklaufenden Laserpulses. Dieser läuft in Rückwärts- bzw. Sperrrichtung durch einen Faraday-Rotator. Dieser dreht die Polarisationssebene des zurücklaufenden Laserpulses so, daß er an einem Polarisator herausgekoppelt wird. a) Reflektiertes Licht, das entsteht, wenn ein einzelner Laserpuls in das Target (Helium-Gasstrahl) fokussiert wird - dies ist die gewöhnliche experimentelle Situation. b) Zurücklaufender Laserpuls im Zweistrahlexperiment. Der in Vorwärtsrichtung laufende Laserpuls wird durch einen Strahlteiler in zwei Pulse aufgespalten, welche mittels zweier Parabolspiegel unter einem Winkel von 180° in das Target fokussiert werden, nach der Reflexion an dem jeweils gegenüber liegenden Parabolspiegel zurücklaufen und sich am Strahlteiler wieder vereinigen. Dadurch entsteht ein zurücklaufender Puls, welcher auf seinem Wege durch das Lasersystem verstärkt und durch den Faraday-Isolator herausgekoppelt wird. Das Signal ist um Größenordnungen höher als das Signal in (a). Die 8-bit CCD-Kamera ($0 \dots 255$ Farbstufen), die den zurücklaufenden Puls auffängt, ist übersteuert.

sersystem; liegen sie ineinander, so werden sie in das Lasersystem fokussiert. Das Ineinanderschieben ist gefährlich für das Lasersystem, und der zerstörte Polarisator läßt sich darauf zurückführen. In weiteren Experimenten ist zu überprüfen, wie stark das Signal der zurücklaufenden Pulse ansteigt, falls die letzten Verstärkerstufe, welche eine Verstärkung auf eine Höchstenergie von etwa 1 J leistet, dazu geschaltet wird.

3.2 Meßanordnung

Abb. 4.14 zeigt zunächst die gesamte Meßanordnung im Überblick. Hinter dem Kompressor befindet sich ein dielektrischer Spiegel, der ankommenden p-polarisierten, d. h. in x -Richtung linear polarisierten, Ti:Sa-Laserpuls nicht vollständig reflektiert, sondern einen Bruchteil von ungefähr 1/1000 hindurch läßt. Der reflektierte Anteil wird als Hauptpuls und der transmittierte als Abtast- bzw. Probepuls (engl.: "probe pulse") bezeichnet [36, 30].

Der Ti:Sa-Hauptpuls verläßt den Kompressor, läuft durch die Strahlführung und tritt in die Targetkammer ein. Dort trifft er auf einen Strahlteiler, der ihn in zwei Teilstrahlen aufteilt (s. Abb. 3.5). Der Strahlteiler besteht aus einer Quarzplatte mit einer Dicke von 2.5 mm und einem Durchmesser von 100 mm. Da der Strahlteiler genau bei der Zentralwellenlänge des Hauptpulses von 795 nm eine Transmission von 50 % beträgt, besitzen der am Strahlteiler reflektierte und der transmittierte Teilstrahl die gleiche Energie. Die beiden Teilstrahlen treffen auf zwei goldbeschichtete off-axis Parabolspiegel mit einer Brennweite von 120 mm. Zwei schwarz eloxierte Metallbleche mit einem Durchmesser von 70 mm dienen als Schließer (engl.: "shutter"). Sie werden mit mechanischen Drehdurchführung bedient und dazu genutzt, die beiden Teilstrahlen unabhängig voneinander abdecken zu können. Nach der Reflexion an den Oberflächen der Parabolspiegel laufen sie in entgegengesetzte Richtungen, ihre Foki sitzen oberhalb einer zylindrischen Gasdüse. Um die goldbeschichteten Oberflächen der Parabeln vor Verschmutzungen (engl.: "debris") zu schützen, befinden sich vor jedem Parabolspiegel zwei auswechselbare Quarzplatten. Zwei Spiegel, die sich unmittelbar hinter dem Eintrittsfenster der Targetkammer befinden, führen nach zweifacher Reflexion zu einem Parallelversatz. Dies ist nützlich, um die Foki in der Mitte der Targetkammer legen zu können.

Der Gasstrahl ist gepulst; er wird mit einer zylindrischen Gasdüse erzeugt, welche auf dem Targethalter montiert ist. Bei einem Helium-Hintergrunddruck von 50 bar erzeugt sie Gasausstöße mit einer Wiederholrate von 10 Hz. Da sie ist mit dem Lasersystem synchronisiert ist, trifft jeder Laserschuß den Gasstrahl auf die gleiche Weise, und außerdem strömt zwischen aufeinanderfolgenden Laserschüssen kein Gas aus. Dadurch läßt sich

3 Experimenteller Aufbau

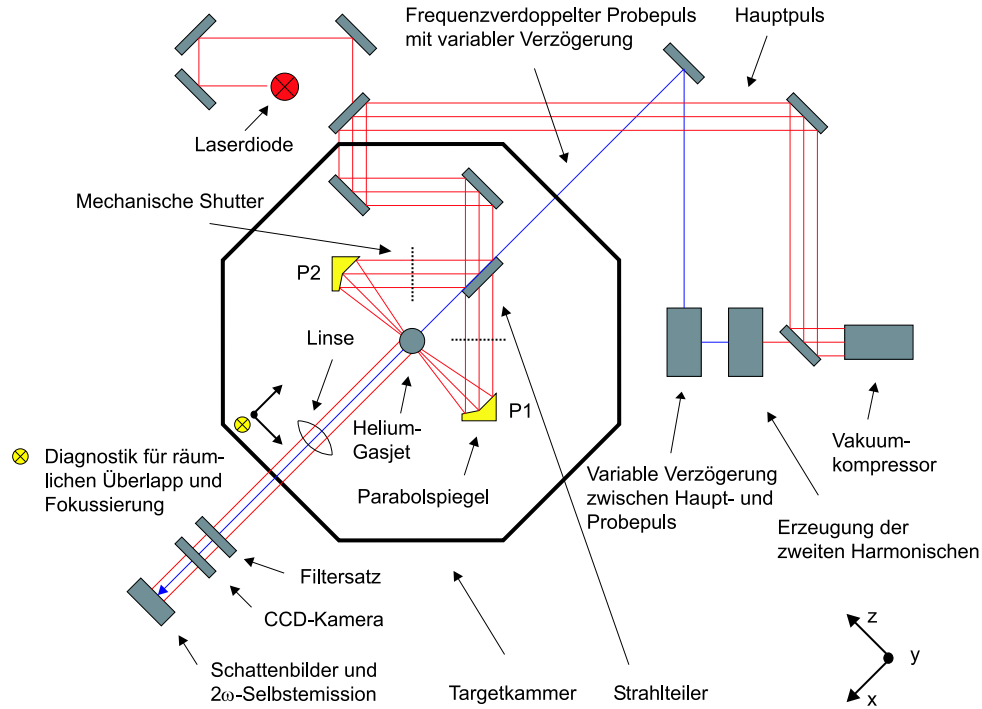


Abbildung 3.4: Experimenteller Aufbau. Eine gewöhnliche Laserdiode (roter Kreis mit Kreuz) wird zur groben Ausrichtung des Aufbaus verwendet. Der verkürzte Ti:Sa-Hauptpuls (rote Linien) tritt in die Vakuumkammer ein, trifft auf einen 50/50-Strahlteiler und wird in zwei Teilstrahlen aufgespalten. Die beiden Teilstrahlen werden durch zwei Parabolspiegel (P1: erster Parabolspiegel, P2: zweiter Parabolspiegel) in entgegengesetzte Richtung in einen gepulsten Helium-Gasstrahl fokussiert. Die beiden Wege lassen sich durch zwei mechanische Shutter unabhängig voneinander öffnen oder schließen. Der gemeinsame Fokus der beiden Parabolspiegel liegt innerhalb des Gasstrahls, d. h. oberhalb der Öffnung der Gasdüse. Ein frequenzverdoppelter Probepuls (blaue Linie), dessen zeitliche Verzögerung (bzgl. des Hauptpulses) veränderlich einstellbar ist, dient dazu, das Gebiet der Laser-Plasma-Wechselwirkung zu untersuchen. Er läuft durch eine Sammellinse, passiert einen 2ω -Interferenzfilter und trifft auf eine CCD-Kamera (Aufnahme von Schattenbildern). Außerdem wird die 2ω -Selbstemission des Plasmas (zweite Harmonische der nichtlinearen Thomsonstreuung) auf eine CCD-Kamera abgebildet. Eine Fokussier- und Überlappdiagnostik ist von innen an die Kammerwand befestigt (gelbes Kreuz). Die Diagnostik kann so verfahren werden, daß die Foki der beiden Laserpulse auf eine CCD-Kamera abgebildet werden; ein Filtersatz verbessert die Fokusvermessung. In Wirklichkeit werden sowohl die Bilder der 2ω -Selbstemission als auch die Schattenbilder unter einem Winkel von 84° beobachtet (in der Zeichnung 90°).

3 Experimenteller Aufbau

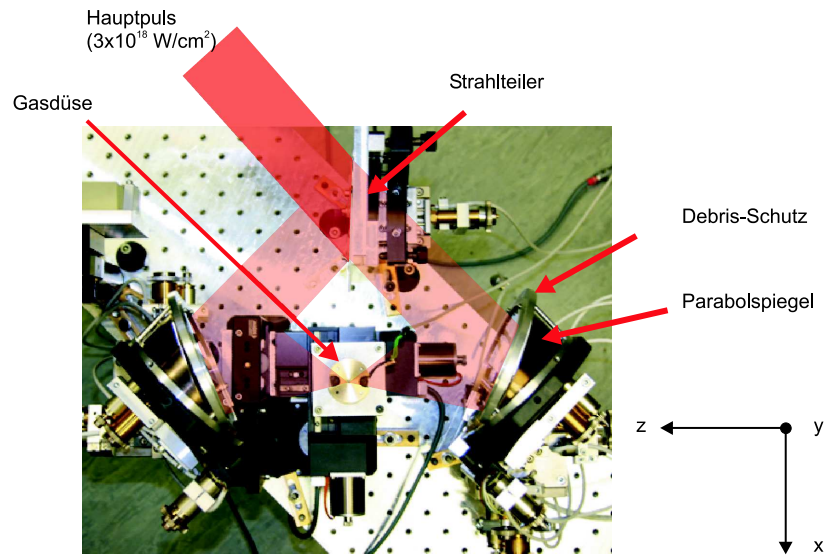


Abbildung 3.5: Strahlteiler, Parabolspiegel und Gasdüse. Das Photo zeigt den Strahlen-
gang des Hauptpulses nach Eintritt in die Targetkammer. Vor den beiden
Parabolspiegeln befinden sich abnehmbare und austauschbare Quarzplat-
ten, um die goldbeschichtete Oberflächen der Parabolspiegel vor Ver-
schmutzungen und möglicherweise entstehenden Teilchen zu schützen.
Der Strahlteiler, die Parabolspiegel und der Targethalter, welcher die
Gasdüse bewegt, sind vollständig motorisiert. Die Motoren sind vaku-
umtauglich und reproduzierbar rechnergesteuert.

3 Experimenteller Aufbau

vermeiden, daß der Druck in der Vakuumkammer zu sehr ansteigt und die Pumpen werden geschont, die sonst nach einiger Zeit überlastet wären. Die zweite Harmonische, die bei der Laser-Plasma-Wechselwirkung entsteht, wird in x -Richtung auf eine CCD-Kamera abgebildet.

Nicht nur die Gasdüse und das Lasersystem, sondern auch die CCD-Kamera sind im Gleichlauf, d. h. auf 10 Hz synchronisiert. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Laserschüssen verstreicht eine Zeit von 100 ms. Die Belichtungszeit der CCD-Kamera liegt bei wenigen Milisekunden. Das hat zur Folge, daß die Kamera das während der kurzen Laser-Plasma-Wechselwirkungszeit (Femto- bis Pikosekunden) ausgesandte Licht vollständig integriert - die aufgenommenen Bilder sind also zeitintegriert. Wird das Plasma mit einem Probepuls beleuchtet, welcher genauso kurz ist wie der Hauptpuls, so entspricht die Belichtungszeit der gemeinsamen Pulsdauer von $\tau_p \sim 100$ fs - die Aufnahmen sind zeitaufgelöst!

Der Probepuls läuft in einen BBO-Kristall, der durch einen nichtlinearen optischen Prozeß die zweite Harmonische des infraroten Hauptpulses erzeugt (engl. : "second harmonic generation", SHG). Sein Lichtweg läßt sich über eine Spiegelanordnung einstellbar verlängern. Somit kann der frequenzverdoppelte Probepuls bezüglich des Hauptpulses veränderlich zeitlich verzögert werden. Die zeitliche Verzögerung ist innerhalb einiger Nanosekunden variabel einstellbar - mit einer zeitlichen Auflösung von $\Delta\tau_p = 100$ fs. Dies ist für die zeitaufgelöste Beobachtung der Pulsausbreitung innerhalb des Plasmas und die zeitliche Überlagerung der beiden Teilstrahlen erforderlich (s. Kap. 4).

Um die beiden Teilstrahlen nacheinander fokussieren und ihre Foki räumlich überlappen zu können, wird die "Fokussier- und Überlappdiagnostik" verwendet (s. Abb. 3.6, 3.7). Die Diagnostik ist von innen an die Targetkammer befestigt und kann in x , y , z -Richtung rechnergesteuert mit einer Motorkalibrierung von $5 \mu\text{m}/\text{Schritt}$ verfahren werden. Der z -Motor ist zusätzlich mit einem Haltestrom ausgestattet, der verhindert, daß die Diagnostik aufgrund ihres eigenen Gewichtes herunterrutscht und möglicherweise ihre Position verliert. Da sie unmittelbar die Wand der Vakuumkammer berührt, verändert sich ihre Position leicht beim Abpumpen. Während der Fokussierung ist daher darauf zu achten, daß der durch die Fokussierobjektive abgebildete Strahl auf der CCD-Kamera bleibt.

Die Fokussier- und Überlappdiagnostik besteht aus vier Mikroskopobjektiven 40-facher Vergrößerung: Zwei Objektive dienen zur Fokussierung (Fokussierobjektive) und zwei weitere zur Justage des räumlichen Überlapp (Überlappobjektive). Die Fokussierobjektive schauen in entgegengesetzte Richtungen und sind parallel zur z -Achse befestigt, während die Überlappobjektive in x - und y -Richtung ausgerichtet sind. Hinter den Fo-

3 Experimenteller Aufbau

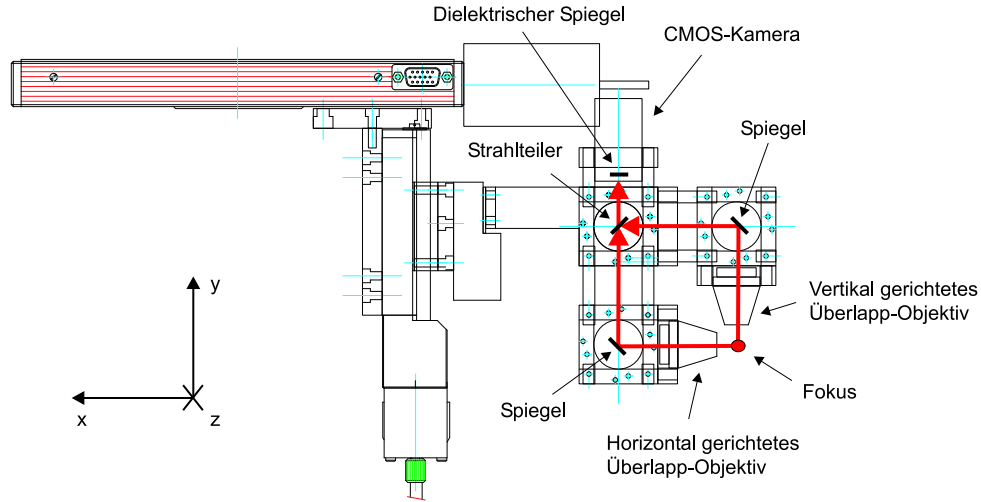


Abbildung 3.6: Fokussier- und Überlappdiagnostik. Die Diagnostik ist an der Innenseite der Vakuumkammer befestigt und kann in alle drei Raumdimensionen bewegt werden. Sie besteht aus zwei Paaren von Mikroskopobjektiven 40-facher Vergrößerung (zwei Fokussier- und zwei Überlappobjektive). Die Fokussierobjektive sind in der Zeichnung der Übersichtlichkeit wegen weggelassen. Die Überlappobjektive werden benutzt, um die Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse zu beobachten und räumlich überlagern zu können (die beiden Pulse laufen in z -Richtung). Das horizontale Überlappobjektiv schaut in x -Richtung, und das vertikale schaut in y -Richtung auf den Fokus (roter Punkt). Der gemeinsame Fokus wird auf zwei verschiedenen Lichtwegen (rote Pfeile), die durch einen Strahlteiler wieder vereinigt werden, auf eine CMOS-Kamera abgebildet. Die CMOS-Kamera sitzt oben auf der Diagnostik. In jedem der beiden Lichtwege befindet sich ein Shutter, so daß die Bilder des horizontalen und des vertikalen Überlappobjektivs unabhängig voneinander aufgenommen werden können. Unterhalb der CMOS-Kamera liegt ein dielektrischer Spiegel, welcher für 1ω -Streulicht des Lasers undurchlässig ist. Idee und Aufbau: Kay-Uwe Amthor.

3 Experimenteller Aufbau

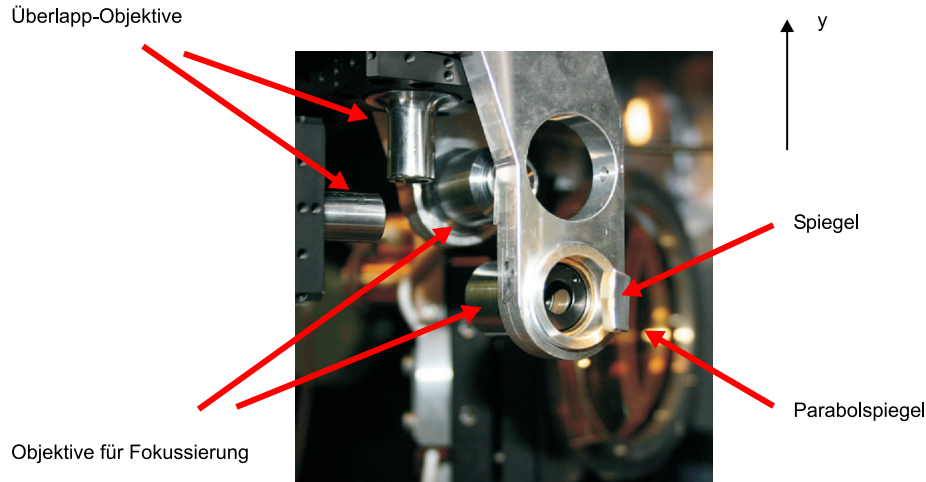


Abbildung 3.7: Fokussier- und Überlappobjektive.

kussierobjektiven befinden sich jeweils zwei kleine Metallspiegel, die so gebogen sind, daß die Foki auf eine feststehende CCD-Kamera außerhalb der Targetkammer reflektiert und abgebildet werden können. Die Überlappobjektive schauen von oben (vertikales Überlappobjektiv) und von der Seite (horizontales Überlappobjektiv) auf denselben Punkt im Raum (gemeinsamer Fokus). Die Anordnung ermöglicht es, zu überprüfen, ob die Foki der gegenläufigen Strahlen in allen drei Raumdimensionen überliegen. Mit dem vertikalen Überlappobjektiv erkennt man, ob die Foki in x -Richtung übereinanderliegen, mit dem horizontalen Überlappobjektiv, ob sie in y -Richtung übereinanderliegen. Ob die Foki in z -Richtung übereinander liegen, erkennt man mit beiden Überlappobjektiven. Im folgenden soll der Strahlengang von Lichtstrahlen, welche von dem gemeinsamen Fokus ausgehen, verfolgt werden (s. Abb. 3.6): Lichtstrahlen laufen durch das horizontale und das vertikale Überlappobjektiv, werden von kleinen Metall-(Aluminium)spiegeln reflektiert und treffen schließlich auf einen Strahlteiler. Vor den Spiegeln befinden sich jeweils motorisierte, mechanische Schließer, die unabhängig voneinander geöffnet oder geschlossen werden können. Dadurch läßt sich zwischen den beiden Abbildungswegen unterscheiden, und die Bilder können getrennt aufgenommen werden - andernfalls wären sie immer überlagert. Die Lichtstrahlen werden durch den Strahlteiler vereint, laufen durch einen dielektrischen Spiegel und treffen auf eine CMOS-Kamera (engl. : "complementary metal oxide semiconductor"). Der dielektrische Spiegel ist innerhalb einer spektralen Bandbreite von 50 nm um die Zentralwellenlänge des Lasers von 795 nm hochreflektierend. Bei näherungsweise senkrecht einfallendem Strahl, d. h. für einen Einfallswinkel von

3 Experimenteller Aufbau

Strahlteiler	Targethalter	Parabolspiegel	Überlapp- und Fokussierdiagnostik
0.028 μm /Schritt	5 μm /Schritt	0.03 μm /Schritt	5 μm /Schritt

Tabelle 3.2: Schrittweite der einzelnen Motoren.

$0^\circ \dots 20^\circ$, besitzt er eine Reflektivität von 99 %. Aufgrund seiner hohen Reflektivität bei einer schmalen Bandbreite ($0.15 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$) um die Laserfrequenz ($2.47 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$) ist er in der Lage, störendes 1ω -Streulicht des Lasers fast vollständig zu blocken.

Die CMOS-Kamera arbeitet im PAL-Modus (engl. : "phase alternating line", Fernsehstandard) und nimmt 50 Bilder ("frames") je Sekunde auf. Sie kann nicht mit dem Lasersystem synchronisiert werden. Da zwischen zwei aufeinanderfolgenden Laserschüssen eine Zeit von 0.1 s ($\hat{=}$ 10 Hz) verstreicht, und die Kamera alle 0.02 s ($\hat{=}$ 50 Hz) ein Bild aufnimmt, sind nur wenige Bilder schwarz. Im PAL-Modus zeichnet die CMOS-Kamera für jedes Bild abwechselnd die ungeraden und die geraden Zeilen auf, d. h. 25 Halb- und 25 Vollbilder. Ein Problem stellt die kurze Laser-Plasma-Wechselwirkungszeit dar, welche im Femtosekundenbereich liegt, und die Belichtungszeit der Kamera angibt. Da die Kamera nur einen kurzen Lichtblitz sieht, ist sie nicht so schnell in der Lage, sowohl die geraden als auch die ungeraden Zeilen aufzunehmen. Um auswertbare Bilder zu erhalten, werden die Halb- und die Vollbilder zeilenweise auseinandergezogen und addieren sie jeweils ("Labview 7", "de-interlacing"). Ein Vorteil ist, daß die CMOS-Kamera wenig Strom verbraucht und daher nicht so heiß wird. Sie arbeitet somit auch im Vakuum - im Gegensatz zu einer CCD-Kamera, die nur außerhalb des Vakuums betrieben werden kann. Allerdings muß auch die CMOS-Kamera nach einiger Zeit immer wieder ausgeschaltet werden, um sie vor Überhitzung zu schützen.

Die optischen Elemente, die sich in der Vakuumkammer befinden, stehen auf einer Bodenplatte, welche auf drei Punkten (kugel-)gelagert ist und die den Boden der Vakuumkammer nicht unmittelbar berührt. Dies hat den Vorteil, daß sich, falls sich die Kammer aufgrund der Druckänderung beim Evakuieren verzieht, die Ausrichtung der optischen Elemente nicht ändert. Der Strahlteiler, die beiden Parabolspiegel und der Targethalter sind motorisiert, um genau und reproduzierbar ausrichten und verfahren zu können. Der Strahlteiler kann in z -Richtung, der Targethalter und die Parabolspiegel in x , y , z -Richtung bewegt werden; die Parabolspiegel rotieren zusätzlich um die x - und die y -Achse. Die beiden Rotationsfreiheitsgrad sind nötig, um die Parabolspiegel zu verkippen und dadurch den Astigmatismus (die strichförmige Verzeichnung) zu beseitigen.

Kleine Schrittweiten, die insbesondere für den Strahlteiler und die Parabolspiegel benötigt werden, erreicht man durch geeignete Übersetzung der Zahnräder. Die Motor-

3 Experimenteller Aufbau

kalibrierung beträgt für den Strahlteiler $0.028\,\mu\text{m}$, für den Targethalter $5\,\mu\text{m}$ und für die Parabolspiegel $0.03\,\mu\text{m}$ je Schritt (s. Abb. 3.2). Die Motoren arbeiten zuverlässig im Hochvakuum bei einem Druck von 10^{-5} mbar und sind vollständig rechnergesteuert. Zur Steuerung wird die Programmiersprache "Labview 7" verwendet. Die Schnittstelle zwischen den Motoren und den Rechnern können mit einem Programm (engl. : "port monitoring program") auf Fehler überprüft werden.

4 Experimentelle Resultate

In diesem Kapitel werden die experimentellen Methoden und Resultate beschrieben und die Meßergebnisse gedeutet. Dabei wird erklärt, wie die beiden gegenläufigen Laserpulse mit hoher Genauigkeit überlagert werden können. Die Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse werden im einzelnen charakterisiert, und der Überlapp wird in Raum und Zeit verifiziert (s. Kap. 4.3). Schließlich dient die Autokorrelationsmessung bei relativistischer Intensität dazu, experimentelle Werte für die Pulsdauer und die Rayleighlänge zu ermitteln (s. Kap. 4.4).

4.1 Eigenschaften der fokussierten Laserpulse

Zur Beobachtung der Foki werden diese mit Fokussierobjektiven (s. Abb. 3.6, 3.7) nacheinander vergrößert auf eine infrarotempfindliche CCD-Kamera abgebildet (s. Abb. 4.1). Abgebildet wird die y, z -Ebene, so daß man die transversale Intensitätsverteilung in jedem der Foki erhält. Um die Mikroskopobjektive zu schützen, werden die Laserpulse abgeschwächt - ein Objektiv, das in einen nicht abgeschwächten fokussierten Strahl schaut, wird zerstört. Eine Anordnung von zwei drehbaren dielektrischen Spiegel, die so zueinander orientiert werden können, daß sie den Laserpuls um bis zu 10^{-6} abschwächen, wird verwendet. Durch Verkippen der Parabolspiegel, d. h. Drehen um die horizontale und vertikale Achse, wird der Astigmatismus verringert.

Die CCD-Kamera zeigt 8-bit Bilder der Foki (Farbstufen: 0 . . . 256). Die Bilder werden kalibriert, indem vor den Strahlteiler, also in den unfokussierten Strahl, ein Gitter gestellt wird und dieses durch die jeweiligen Fokussierobjektive auf die CCD-Kamera abgebildet wird. In der Brennebene der Parabolspiegel, d. h. in der y, z -Ebene auf der CCD-Kamera, entsteht ein Beugungsmuster. Bei einem Gitter sind die Abstände der Beugungsmaxima in z -Richtung (Δz) gegeben durch

$$\Delta z = \frac{\lambda_0 f}{d}, \quad (4.1)$$

wobei λ_0 die Zentralwellenlänge des Lasers, f die Brennweite des Parabolspiegels und d die Gitterkonstante sind. Bei der Zentralwellenlänge von 795 nm, der Brennweite der

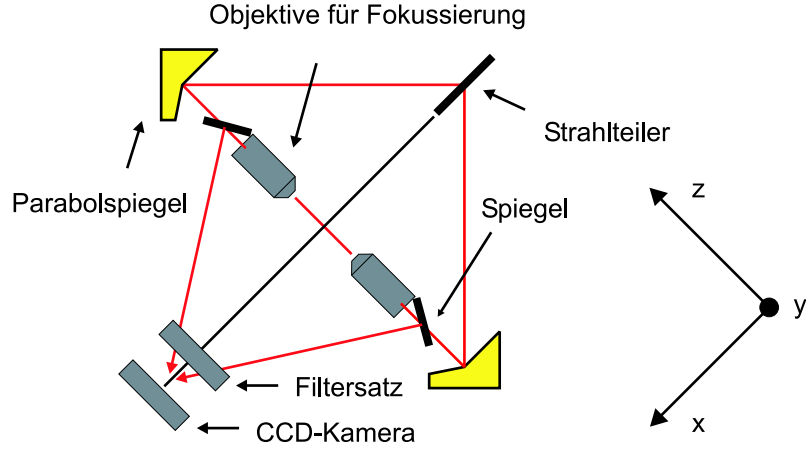


Abbildung 4.1: Fokussierung der beiden Foki. Die Foki der beiden Parabolspiegel werden nacheinander auf die CCD-Kamera abgebildet. Die von den jeweiligen Foki ausgehenden Lichtstrahlen gehen durch Fokussierobjektive, werden mittels gebogener Spiegel reflektiert, laufen durch einen Filtersatz und treffen auf die CCD-Kamera.

Fokusbilder	Überlappbilder	2ω -Bilder
$0.03 \mu\text{m}/\text{pixel}$	$1.3 \mu\text{m}/\text{pixel}$	$1.9 \mu\text{m}/\text{pixel}$

Tabelle 4.1: Kalibrierung der Fokus-, Überlapp- und 2ω -Bilder (Schattenbilder und Selbstemission des Plasmas)

Parabolspiegel von 120 mm und der Gitterkonstanten von 10 mm erhält man für die Abstände der Beugungsmaxima $\Delta z = 9.54 \mu\text{m}$. Die Abstände der Beugungsmaxima auf der CCD-Kamera werden mit einem Bildverarbeitungsprogramm in "Laview 7" zu $\Delta z = 289 \text{ pixel}$ bestimmt. Daraus ergibt sich die Kalibrierung der Fokusaufnahmen zu $0.03 \mu\text{m}/\text{pixel}$ (s. Abb. 4.1).

Um den Aufnahmebereich der CCD-Kamera zu erhöhen, werden für verschiedene Aufnahmen unterschiedlich starke Graufilter bekannter Transmission verwendet: mit dem stärksten Filter wird die Intensität aufgenommen, so daß die Kamera gerade nicht übersteuert ist. Anschließend wird die Filterstärke nacheinander verringert und dabei jeweils ein übersteuertes Bild aufgenommen. Dadurch erhöht sich der dynamische Bereich der Messung auf etwa drei Größenordnungen. Außerdem werden so auch die schwachen Intensitätsbereiche am Rand erfaßt. Die mit unterschiedlichen Filterstärken aufgenommen 8-bit Bilder werden zu einem einzigen Bild zusammengesetzt. Dabei werden alle Flächenelemente, deren Pixelwerte größer als das $1/e$ -fache der Maximalintensität sind, wie

4 Experimentelle Resultate

	Erster Fokus	Zweiter Fokus
Gemittelte Fokusfläche ($1/e$)	$(5.6 \pm 0.6) \mu\text{m}^2$	$(6.3 \pm 0.6) \mu\text{m}^2$
Gemittelter $q_{1/e}$ -Parameter	0.35	0.40

Tabelle 4.2: Eigenschaften der Foki.

bei einem Puzzle zusammengelegt (s. Abb. 4.2) und der Wert eines übersteuerten Bildpunktes durch denjenigen eines nicht übersteuerten Bildpunktes ersetzt- gewichtet mit der zugehörigen Filterstärke. Schließlich wird über alle Bildpunkte integriert, deren Pixelwerte über dem $1/e$ -fachen des Maximalwertes liegen, und man erhält die Energie ($E_{1/e}$). Die Gesamtfläche dieser Bildpunkte wird als $1/e$ -Fläche ($A_{1/e}$) bezeichnet, und die Strahltaile (W_0) wird über $A_{1/e} = \pi W_0^2$ (kreisförmige Querschnittsfläche) berechnet.

Die Intensität eines Gauß'schen Strahles fällt innerhalb eines radialen Abstandes $r_{1/e} = W(z)/\sqrt{2}$ von der optischen Achse auf das $1/e$ -fache der Intensität ab (s. Anh. 7.11). In der Ebene, die durch den Fokus geht ($z = 0$), gilt

$$r_{1/e} = W_0/\sqrt{2}, \quad (4.2)$$

wobei W_0 die Breite der Strahltaile ist. Ein Gauß'scher Strahl kann auf eine Fokusfläche von

$$A_{\text{ideal}} = \frac{\lambda_0^2 f^2}{\pi W_0^2} = \frac{\lambda_0^2 f^2}{2\pi r_{1/e}^2} \quad (4.3)$$

fokussiert werden, wobei λ_0 die Zentralwellenlänge des Lasers, f die Brennweite der fokussierenden Optik und $r_{1/e}$ der radiale Abstand von der optischen Achse sind, bei welcher die Intensität auf das $1/e$ -fache abfällt (Herleitung durch Anwendung einer "ABCD-Strahlmatrix" auf einen Gauß'schen Strahl, der mittels einer Linse fokussiert wird, Bedingung: $z_0 \gg f$, Lit. [22]). Für die Brennweite des Parabolspiegels von $f = 120 \text{ mm}$, die Zentralwellenlänge von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ und den Strahldurchmesser von $2r_{1/e} = 50 \text{ mm}$ ergibt sich eine minimale $1/e$ -Fokusfläche von $A_{\text{ideal}} = 2.3 \mu\text{m}^2$. Dies entspricht einer minimalen Strahltaile von $W_{0,\text{ideal}} = 0.86 \mu\text{m}$.

Die experimentell bestimmten Flächen des ersten und des zweiten Fokus betragen (s. Tab. 4.2, vgl. Abb. 4.2)

$$\bar{A}_{1,\text{exp}} = (5.6 \pm 0.6) \mu\text{m}^2, \bar{A}_{2,\text{exp}} = (6.3 \pm 0.6) \mu\text{m}^2. \quad (4.4)$$

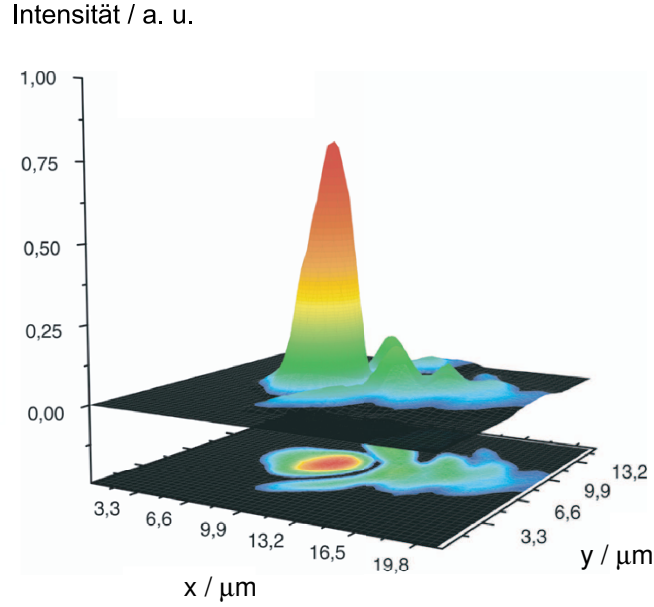


Abbildung 4.2: Intensitäten der Foki. Die Foki der beiden Laserpulse werden mit Mikroskopobjektiven (Vergrößerung: 40-fach) auf eine CCD-Kamera (8-bit) abgebildet. Das dreidimensionale Bild zeigt in linearer Darstellung die Intensität über der Fokusfläche. Das Bild ist aus mehreren 8-bit Bildern mit jeweils unterschiedlicher Filterstärke zusammengesetzt, um auch die Randbereiche der Foki besser erfassen zu können. Die Fokusfläche, bei der die Intensität auf das $1/e$ -fache abfällt, beträgt etwa $6 \mu\text{m}^2$. An den Randbereichen sind Nebenmaxima zu erkennen ($\lesssim 10\%$ des Hauptmaximums) - dies sind Abweichung vom idealen Strahlprofil.

4 Experimentelle Resultate

Daraus ergeben sich die zugehörigen Tailenbreiten

$$W_{0,1,\text{exp}} = (1.3 \pm 0.4) \mu\text{m}, W_{0,2,\text{exp}} = (1.4 \pm 0.4) \mu\text{m} \quad (4.5)$$

Als absoluten Größtfehler ($\Delta A = \pm 0.6$) der Fokusfläche wird die maximale Abweichung von den Mittelwerten angegeben (relative Fehler: $\Delta A/A \approx \pm 10\%$).

Ein Maß für die Abweichung eines realen von einer idealen Gauß'schen TEM₀₀-Mode beschreibt die M^2 -Zahl

$$M^2 = \frac{W_{0,\text{exp}}\theta_{\text{exp}}}{W_{0,\text{ideal}}\theta_{\text{ideal}}}, \quad (4.6)$$

wobei $W_{0,\text{exp}}$ bzw. θ_{exp} Fokusradius und Divergenzwinkel des realen und $W_{0,\text{ideal}}$ bzw. θ_{ideal} die des idealen Strahls sind. Die M^2 -Zahl ist immer größer als eins ($M^2 > 1$). Besitzen beide Strahlen vor der Fokussierung die gleiche Divergenz ($\theta_{\text{exp}} = \theta_{\text{ideal}}$), so ergibt sich $M^2 = W_{0,\text{exp}}/W_{0,\text{ideal}}$. D. h. die Tailenbreite des realen Strahls ist um den Faktor M^2 größer als die des idealen Strahls; da die Rayleighlänge quadratisch mit der Tailenbreite geht ($z_0 \sim W_0^2$), ist die Rayleighlänge um den Faktor M^4 größer.

Die M^2 -Zahl der Laserstrahlen beträgt

$$M_{\text{P1,exp}}^2 \approx 1.6, M_{\text{P2,exp}}^2 \approx 1.7, \quad (4.7)$$

d. h. sie sind nicht ganz so scharf fokussiert wie ein idealer Gauß'scher Strahl ($M_{\text{ideal}}^2 = 1$), sondern etwa 2-fach beugungsbegrenzt.

Das Verhältnis der Energie innerhalb der $1/e$ -Fläche zur gesamten Energie, die auf die CCD-Kamera trifft, wird bezeichnet als (s. Anh. 7.11)

$$q_{1/e} = E_{1/e}/E_{\text{CCD}}. \quad (4.8)$$

Der theoretische Wert für einen idealen Gauß'schen Puls beträgt $q_{\text{ideal}} = 0.63$. D. h. Innerhalb der $1/e$ -Fläche liegen 63 % der gesamten Energie, die in einem idealen Gauß'schen Puls enthalten sind. Je höher bzw. niedriger der Wert des $q_{1/e}$ -Parameter ist, desto besser bzw. schlechter ist die Fokussierung. Ein hoher Wert bedeutet, daß viel Energie in der Nähe der optischen Achse vorhanden ist, während ein niedriger Wert anzeigt, daß viel Energie in den Randbereichen des Fokus verloren geht.

Die aus den zusammengesetzten Bildern experimentell bestimmten Werte ergeben: Der Mittelwert des $q_{1/e}$ -Parameters liegt für den Fokus des ersten Parabolspiegels bei $\bar{q}_{\text{P1}} = 0.35$ und für den Fokus des zweiten Parabolspiegels bei $\bar{q}_{\text{P2}} = 0.40$. Die Schwankung um den Mittelwert ergibt einen relativen Fehler von $\Delta q_{1/e}/q_{1/e} = \pm 10\%$. Die Fokussierung

4 Experimentelle Resultate

des ersten Parabolspiegels ist daher gegenüber der des zweiten Parabolspiegels ein wenig schlechter. Die experimentellen Werte sind kleiner als der theoretische Wert $q_{\text{ideal}} = 0.63$. Dies läßt sich dadurch erklären, daß das reale transversale Strahlprofil von einem idealen Gauß'schen Strahlprofil abweicht. Das gemessene Strahlprofil ist daher nicht so homogen wie das einer idealen TEM₀₀-Mode.

Weiterhin soll die Energie bestimmt werden, die in den einzelnen Foki enthalten sind. Vor dem Kompressor wird eine Energie von 290 mJ gemessen, wobei die Schwankung von Puls zu Puls etwa 5 % beträgt. Wird die Energie beim Eintritt in die Targetkammer gemessen, und setzt man diese in das Verhältnis zur Energie, welche vor dem Kompressor gemessen wird, so ergibt sich eine Transmission von 35 %. Das bedeutet, daß die Laserpulse während des Experimentes beim Durchgang durch den Kompressor 65 % ihrer Energie verlieren. Die geringe Transmission und der damit verbundene hohe Energieverlust ist auf einen Schaden auf einem der Kompressorgitter zurückzuführen - normalerweise beträgt die Kompressortransmission 60...65 % und der damit verbundene Energieverlust 35...40 %). Solch ein Schaden läßt sich durch Austauschen der Kompressorgitter beheben. Der Strahlteiler besitzt bei der Zentralwellenlänge von 795 nm eine Transmission von 50 nm. Daraus folgt, daß nach der Reflexion und der Transmission in jedem der beiden Teilstrahlen nur noch die Hälfte der Energie steckt. Nach Abzug aller Verluste (Gesamttransmission: 18 %) steht daher in jedem Teilstrahl eine Energie von etwa $E_{1/2} = 50$ mJ zur Verfügung. Mit dem Energiemesser (engl. : "energy power meter") wird nicht nur die Energie der kurzen Laserpulse im Femtosekundenbereich, sondern auch die Energie der verstärkten spontanen Emission im Nanosekundenbereich (engl. : "amplified spontaneous emission", ASE) gemessen; in den Verstärkerkristallen findet spontane Emission statt, die durch das Pumpen verstärkt und mitgemessen wird. Der Energieanteil der ASE an der Gesamtenergie liegt bei unter 8 % [37]. D. h. Es werden bis zu 4 mJ zu viel gemessen, welche nur in der ASE und nicht in dem interessierenden Laserpuls enthalten sind

$$E_{1/2} = (50 - 8 \%) \text{ mJ} = (50 - 4) \text{ mJ}. \quad (4.9)$$

Da die Dauer der ASE (τ_{ASE}) die des Laserpulses (τ_{p}) um Größenordnungen übertrifft, gilt $I_{\text{ASE}} \sim 1/\tau_{\text{ASE}} \ll I_{\text{p}} \sim 1/\tau_{\text{p}}$; sie trägt daher nur unwesentlich zur Intensität bei und geht nicht in ihren Fehler ein.

Die Pulsdauer wird mit einem Autokorrelator dritter Ordnung gemessen: Hinter dem Vakuumkompressor teilt ein halbdurchlässiger Spiegel den ankommenden Laserpuls in zwei Teilstrahlen auf: Einer der beiden Teilstrahlen läuft durch einen nichtlinearen BBO-Kristall (Bariumbetaborit-Kristall), in welchem die zweite Harmonische erzeugt wird.

4 Experimentelle Resultate

Der andere durchläuft eine Verzögerungsstrecke, die seine Wegstrecke verändert, und durch die er variabel verzögert werden kann. Beide Pulse werden in einem weiteren BBO-Kristall überlagert, welcher durch THG ("third harmonic generation") die dritte Harmonische erzeugt. Die dritte Harmonische dient als Autokorrelationssignal, welches mit einer Diode und einer CCD-Kamera gemessen wird.

Es ist zu bemerken, daß mit dieser Methode nur die Pulsdauer im aufgeweiteten Strahl ermittelt wird. Die Autokorrelation ist auf einen kleinen Ausschnitt, d. h. $(2 \times 2) \text{ mm}^2$ des räumlichen Strahlprofils begrenzt und schneidet daher einen Teil der Laserenergie, die über den gesamten Strahlquerschnitt verteilt ist, heraus. Der Vorteil der neuen relativistischen Autokorrelationsmethode ist, daß die Pulsdauer unmittelbar im Fokus gemessen wird und somit die volle Energie (E_p), die in den Fokus gebündelt wird - und wegen $I_p \sim E_p$ zur Intensität beiträgt -, berücksichtigt wird. Die Laserintensitäten sind im Fokus so hoch $I \gtrsim 10^{18} \text{ W/cm}^2$ (s. Kap. 4.1), daß sie nichtlineare Kristalle wie BBO, KDP oder LBO ($\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$, KH_2PO_4 bzw. LiB_3O_5), die häufig zum Bau eines Autokorrelators verwendet werden, zerstören würden.

Die Intensität des abgestrahlten Autokorrelationssignals ist von der zeitlichen Überlagerung der beiden Pulse abhängig. Die zeitliche Verzögerung zwischen beiden Pulsen wird über einen Bereich von $-1.5 \dots 1.5 \text{ ps}$ verändert, und währenddessen wird die Intensität des 3ω -Signals aufgenommen (s. Abb. 4.3). Die Intensität erstreckt sich über $5 \dots 6$ Größenordnungen, d. h. die Dynamik der Messung ist $10^5 \dots 10^6$. Die zeitliche Struktur des Pulses besteht aus dem Hauptpuls ($\Delta t = 0$), möglichen Vor- ($\Delta t < 0$) und Nachpulsen ($\Delta t > 0$) und dem Sockel bzw. Untergrund der ASE. Die Pulsform läßt sich für zeitliche Verzögerungen Δt innerhalb eines Bereichs von $-250 \dots +250 \text{ fs}$ gut durch eine Gauß'sche Kurve annähern (Hauptpuls), welche als Korrelationskurve bezeichnet wird

$$S_{3\omega}(\Delta t) \sim \exp\left(-2\frac{\Delta t^2}{\sigma_{\text{kor}}^2}\right), \quad (4.10)$$

wobei $\sigma_{\text{FWHM}} = w\sqrt{\ln 4}$ die FWHM-Breite der Korrelationsfunktion ist. Der aus der Korrelationskurve bestimmte Parameter $w \approx 88 \text{ fs}$ liefert eine FWHM-Korrelationsbreite von $\sigma_{\text{FWHM}} \approx 103 \text{ fs}$. Bei einer klassischen Autokorrelation dritter Ordnung ($S_{3\omega} \sim I_{3\omega}^3$) gilt die Beziehung (Gl. 7.10)

$$\tau_{\text{FWHM}} = \sigma_{\text{FWHM}}\sqrt{2/3} \approx \sigma_{\text{FWHM}}/1.22 \quad (4.11)$$

wobei τ_{FWHM} die FWHM-Pulsdauer und σ_{FWHM} die Korrelationsbreite sind. Mit der FWHM-Korrelationsbreite $\sigma_{\text{FWHM}} \approx 103 \text{ fs}$ ergibt sich somit eine FWHM-Pulsdauer von

4 Experimentelle Resultate

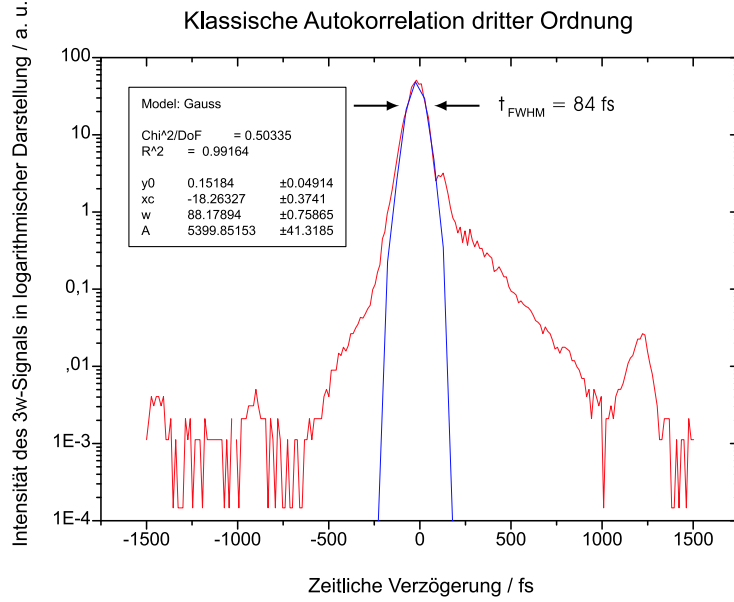


Abbildung 4.3: Klassische Autokorrelation dritter Ordnung. Die Intensität des abgestrahlten 3ω -Signals ist logarithmisch gegen die zeitliche Verzögerung aufgetragen. Die zeitliche Verzögerung läuft über einen Bereich von $-1.5 \dots 1.5 \text{ ps}$. Der Puls setzt sich aus dem Hauptpuls ($-250 \dots 250 \text{ fs}$), Vor- und Nachpuls und dem Untergrund der ASE ("amplified spontaneous emission") zusammen. Negative Zeiten bedeuten frühere Zeiten (vor dem Hauptpuls) und positive Zeiten spätere Zeiten (nach dem Hauptpuls). Die zeitliche Struktur ist symmetrisch zu $\Delta t = 0$; das Verhältnis von Untergrund zu Hauptpuls beträgt etwa 10^4 , und nach ungefähr 1 ps ist ein Nachpuls mit einem Kontrast von etwa $10^{-3} \dots 10^{-4}$ zu erkennen. Die Intensität erstreckt sich über einen Bereich von $10^5 \dots 10^6$ (Dynamik der Messung). In einem Bereich von $-250 \dots 250 \text{ fs}$ läßt sich die Intensität des 3ω -Signals gut durch eine Gauß'sche Kurve annähern; Gauß'scher Standard-Fit in "Origin 7": $y = y_0 + A/w\sqrt{\pi/2} \exp\left(-2(x - x_c)^2/w^2\right)$. Die Korrelationsbreite der Gauß'schen Kurve $\sigma_{\text{FWHM}} = w\sqrt{\ln 4} \approx 88 \text{ fs}\sqrt{\ln 4} \approx 103 \text{ fs}$ liefert eine FWHM-Pulsdauer von $\tau_{\text{FWHM}} \approx 84 \text{ fs}$.

4 Experimentelle Resultate

$\tau_{\text{FWHM}} \approx 84$ fs. Die $1/e$ -Pulsdauer ($\tau_{1/e}$) ist allgemein größer als die FWHM-Pulsdauer (τ_{FWHM}). Beide Größen sind verknüpft durch

$$\tau_{1/e} = \tau_{\text{FWHM}} / \sqrt{\ln 2}. \quad (4.12)$$

Mit der FWHM-Pulsdauer $\tau_{\text{FWHM}} \approx 84$ fs ergibt sich schließlich die $1/e$ -Pulsdauer zu $\tau_{1/e} \approx 101$ fs.

Bei mehreren hintereinander durchgeführten Messungen ergibt sich ein relativer Fehler der Pulsdauer von $\Delta\tau/\tau = 10\%$. Ein systematischer Fehler tritt bei der Detektion der Pulsfrontverkipfung auf: Vor der Fokussierung kann man sich den Laserpuls als dünne Lichtscheibe (Durchmesser: 70 mm, Dicke 30 μm) vorstellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und deren Normale parallel zur Ausbreitungsrichtung ist. Ist die Pulsfront um weniger als $\Delta\alpha_{\text{Kipp}} = 1'$, d. h. eine Bogenminute, verkippt, so kann dies nicht detektiert werden. Die effektive Verlängerung der Pulsdauer ist gegeben durch (7.8, [38])

$$\frac{\Delta\tau_{\text{eff}}}{\tau_p} = \sqrt{1 + \left(\frac{d_{\text{FWHM}} \sin \alpha_{\text{Kipp}}}{c\tau_{p, \text{FWHM}}} \right)^2}, \quad (4.13)$$

wobei d_{FWHM} der FWHM-Strahldurchmesser, α_{Kipp} der Kippwinkel der Pulsfront, τ_p die Pulsdauer und $\Delta\tau_{\text{eff}} = \tau_p + \Delta\tau_p$ die effektive bzw. verlängerte Pulsdauer sind. Bei einem Strahldurchmesser von 40 mm (FWHM), einem Kippwinkel von $1' = 1/60^\circ$ und einer Pulsdauer von 84 fs (FWHM) ergibt sich $\Delta\tau_{\text{eff}}/\tau_p = 1.10$. Dies entspricht einer relativen Verlängerung von $\Delta\tau_p/\tau_p = +10\%$ (FWHM). Betrachtet man die $1/e$ -Pulsdauer, so erhält man $\Delta\tau_p/\tau_p = +7\%$ ($1/e$). Für die mit dem Autokorrelator dritter Ordnung gemessene Pulsdauer ergibt sich schließlich

$$\tau_{\text{FWHM}} = \begin{pmatrix} 84 & +17 \\ & -8 \end{pmatrix} \text{ fs}, \quad \tau_{1/e} = \begin{pmatrix} 101 & +20 \\ & -10 \end{pmatrix} \text{ fs} \quad (4.14)$$

Die Intensität der einzelnen Foki berechnen wird über $I_{1/2} = E_{1/2}/\tau_p A_{1/2}$ berechnet. Um die Energie zu bestimmen, welche in der $1/e$ -Fläche der einzelnen Foki enthalten ist, wird die Energie, die auf der CCD-Kamera ankommt, mit den $q_{1/e}$ -Parametern der jeweiligen Foki multipliziert

$$I_{1/2} = \frac{E_{1/2} q_{1/2}}{\tau_p A_{1/2}}. \quad (4.15)$$

Mit den experimentell bestimmten $1/e$ -Werte für die Energien $E_{1/2} = 50$ mJ, die Parameter $q_1 = 0.35$ und $q_2 = 0.40$, die Pulsdauer $\tau_p = 101$ fs und die Flächen $A_1 = 5.6 \mu\text{m}^2$

4 Experimentelle Resultate

Laserintensität	Elektrisches Feld	Relativistischer Parameter
$\begin{pmatrix} 3 & +0.4 \\ & -0.8 \end{pmatrix} \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$	$\begin{pmatrix} 5 & +0.3 \\ & -0.7 \end{pmatrix} \times 10^{12} \text{ V/m}$	$a_0 = 1.2 \begin{matrix} +0.1 \\ -0.2 \end{matrix}$

Tabelle 4.3: Laserintensität, elektrisches Feld und relativistischer Parameter.

und $A_2 = 6.3 \mu\text{m}^2$ der Foki folgt für beide Foki die Laserintensität ($1/e$)

$$I_L = \begin{pmatrix} 3 & +0.4 \\ & -0.8 \end{pmatrix} \times 10^{18} \text{ W/cm}^2. \quad (4.16)$$

Diese Intensität ist relativistisch (vgl. $I_{\text{rel}} \approx 2.2 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$). Der Fehler setzt sich aus den einzelnen Fehlern $\Delta I_{1/2}/I_{1/2} = \Delta A/A + \Delta q_{1/e}/q_{1/e} + \Delta \tau_p/\tau_p = (+13\% / -27\%)$ zusammen (ASE-Energiefehler geht nicht ein, Verlängerung der Pulsdauer führt zur Erniedrigung der Intensität).

Das elektrische Feld (E_L) und der relativistische Parameter (a_0) ergeben sich über

$$E_L = \sqrt{2I_L/c\epsilon_0} \quad (4.17)$$

$$a_0 = eE_L\lambda_0/2\pi m_e c^2 \quad (4.18)$$

zu $E_L = 5 \times 10^{12} \text{ V/m}$ und $a_0 = 1.2$. Die relativen Fehler pflanzen sich gemäß $\Delta E_L/E_L = \frac{1}{2}\Delta I_L/I_L$ und $\Delta a_0/a_0 = \Delta E_L/E_L$ fort. Es ergibt sich schließlich (s. Tab. 4.3)

$$E_L = \begin{pmatrix} 5 & +0.3 \\ & -0.7 \end{pmatrix} \times 10^{12} \text{ V/m} \quad (4.19)$$

$$a_0 = 1.2 \begin{matrix} +0.1 \\ -0.2 \end{matrix}. \quad (4.20)$$

Dies liegt im Bereich der relativistischen Optik $a_0 \gtrsim 1$!

4.2 Dichteprofil des Gasstrahls

Zur Erzeugung des Gasstrahls dient eine zylindrische Düse mit einem Innendurchmesser von 0.8 mm und einem Außendurchmesser von 1 mm. Ihre Länge beträgt 3 cm. Im Vergleich zu früheren Experimenten am IOQ wird eine längere Gasdüse verwendet, um genügend Platz für die Diagnostik bereitzustellen. Um eine hohe Gasdichte über der Dü-

4 Experimentelle Resultate

se zu erzeugen, wird Heliumgas mit einem Hintergrunddruck von 50 bar angelegt. Durch einen kurzen Stromstoß in einer Spule bewegt sich ein Stößel in der Düse auf und ab und sorgt dafür, daß das Heliumgas mit einem hohen Druck herausströmt. Oberhalb der Düsenöffnung dehnt sich eine Gaswolke in das Vakuum aus ($p_{\text{vak}} \sim 10^{-5}$ mbar), und zur gleichen Zeit trifft ein Laserpuls ein, der die Elektronen zum Schwingen anregt. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gasstößen ist an die Wiederholrate des Lasersystems angepaßt (s. Kap. 3). Die Öffnungszeit der Düse ist innerhalb eines Bereichs von einigen Mikro- bis Millisekunden veränderlich regelbar.

Durch eine interferometrische Messung läßt sich die Gasdichte über der Düse messen¹ [30]. An der Stelle der Foki, d. h. in dem Gebiet der Laser-Plasma-Wechselwirkung, herrscht bei einer Öffnungszeit von $500 \mu\text{s}$ eine Elektronendichte von $5 \times 10^{19} \text{cm}^{-3}$ (s. Abb. 4.4). Bei der kürzesten Öffnungszeit von $170 \mu\text{s}$ reduziert sie sich um zwei Größenordnungen auf $2 \times 10^{17} \text{cm}^{-3}$ (s. Abb. 4.5). In Richtung der Düsenachse nimmt die Elektronendichte in guter Näherung exponentiell ab (s. Abb. 4.4 und 4.5).

4.3 Räumlicher und zeitlicher Überlapp

Das Ziel ist, die beiden gegenläufigen Laserpulse gleichzeitig ihrem gemeinsamen Fokus ankommen zu lassen. Zur räumlichen Überlagerung der beide Foki werden zunächst die optischen Elemente des Aufbaus mittels einer Laserdioden vorjustiert, so daß die Foki in allen drei Raumdimensionen bereits weniger als 5 mm auseinander liegen.

Da die Foki im Vakuum nicht sichtbar sind, wird die Targetkammer zunächst mit Luft bei einem Hintergrunddruck von $10 \dots 100$ mbar geflutet. Anschließend wird mit einer Pulsenergie von 20 mJ in die mit Luft gefüllte Targetkammer fokussiert. Zunächst wird immer nur einen der beiden Teilstrahlen in den Gasstrahl fokussiert und der jeweils andere durch Schließer, welche zwischen dem Strahlteiler und den Parabolspiegeln eingebaut sind (s. Abb. 3.4), versperrt. Dadurch besteht während der Ausrichtung noch keine Gefahr eines Laserpulses, welcher in das Lasersystem zurückläuft. Es werden erst dann beide gegenläufigen Laserpulse in den Gasstrahl fokussiert, wenn die Foki bereits mit Mikrometergenauigkeit übereinanderliegen. Die Pulsenergie von 20 mJ entspricht einer Laserintensität von etwa $2 \times 10^{17} \text{W/cm}^2$.

Es entsteht ein heller, weißer Funke, der als optischer Luftdurchschlag (engl. : "optical

¹Die Messung der Gasdichte wird mit Stickstoff- und nicht mit Heliumgas durchgeführt, da der Brechungsindex von Helium ($n_{\text{He}} = 1.000033$, vgl. Brechungsindex von Stickstoff: $n_{\text{Stick}} = 1.000298$) zu klein ist, um genügend Phasenverschiebung zu erhalten, welche für die Auswertung nötig ist. Es sollten weitere Experimente zur Messung der Gasdichte durchgeführt werden, um den Einfluß unterschiedlicher Gassorten zu untersuchen.

4 Experimentelle Resultate

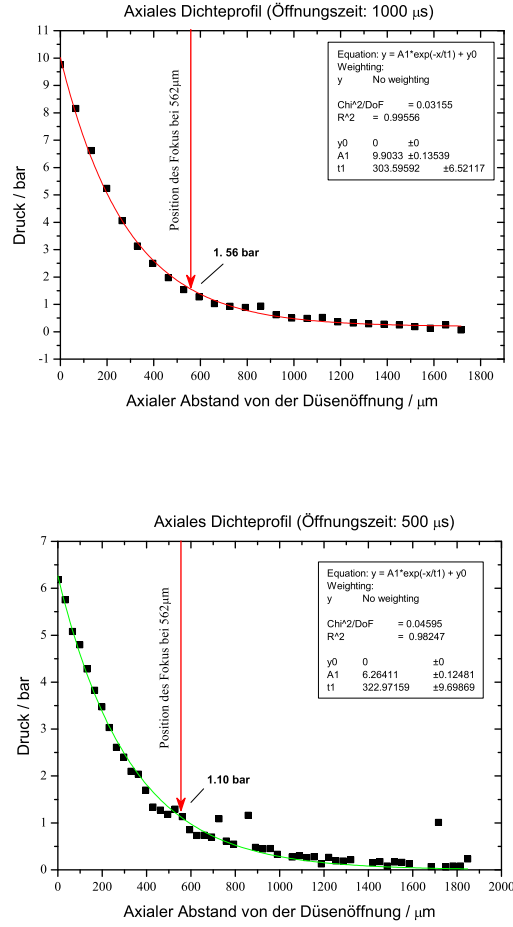


Abbildung 4.4: Hohe Gasdichten. Dichteprofil entlang der Düsenachse für zwei verschiedene Öffnungszeiten (oben: 1000 µs, unten: 500 µs). Der Gasdruck über der Düsenachse ist gegen den axialen Abstand (Abstand in y -Richtung, wobei der Ursprung auf der Düsenöffnung liegt), aufgetragen. Mit größer werdendem Abstand von der Düsenachse nimmt der Druck in guter Näherung exponentiell ab (rote Kurve oben, grüne Kurve unten); $p(y) = p_{\max} \exp(-y/t_1)$, wobei p_{\max} die maximale Dichte, y der axiale Abstand und t_1 der Abnahmekoeffizient sind. An der Fokusposition (angedeutet durch die roten Pfeile) sind die jeweiligen Drücke gezeigt, welche sich mit der Gasgleichung in die Elektronendichte gemäß $n/\text{cm}^{-3} = 2.4 \times 10^{19} p/\text{bar}$ umrechnen lassen. Bei der Öffnungszeit der Gasdüse von 1000 µs beträgt der Druck an der Fokusposition $p = 1.56$ bar und somit die Gasdichte $n_{\text{gas}} \hat{=} 3.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Bei der Öffnungszeit von 500 µs beträgt der Druck an der Fokusposition $p = 1.10$ bar und somit die Gasdichte $n_{\text{gas}} = 2.6 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Unter der Annahme, daß das Heliumgas vollständig ionisiert ist, ist die Elektronendichte doppelt so hoch wie die Gasdichte $n_e = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$.

4 Experimentelle Resultate

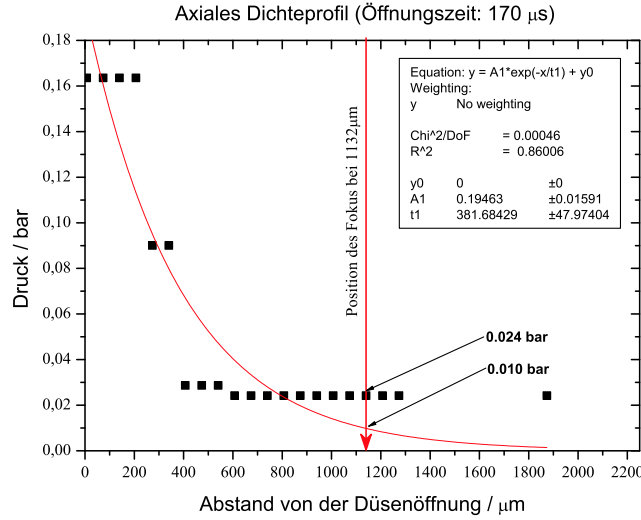


Abbildung 4.5: Niedrige Gasdichte. Dichteprofil entlang der Düsenachse bei einer Öffnungszeit der Gasdüse von 170 μs . Aus den Meßpunkten läßt sich wiederum eine exponentiell abfallende Kurve anpassen (rote Kurve). Der R^2 -Parameter ($R^2 = 0.88$) aus der genäherten Kurve weicht von Eins ab, d. h. die Kurvenanpassung ist nicht besonders gut. Der Grund ist, daß bei der kurzen Öffnungszeit der Düse die Werte für die integrale Phasenverschiebung, welche der Probepuls beim Durchlaufen des Gases aufammelt, klein sind. Bei einem Druck von $p = 0.010$ bar (rote Kurve, Fokusposition) bzw. einem Druck von $p = 0.024$ bar (schwarzer Meßpunkt, Fokusposition) ergeben sich die Gasdichten $n_{\text{gas}} = 2.4 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ bzw. $n_{\text{gas}} = 5.8 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Die einzelnen Meßpunkte bei einer kurzen Öffnungszeit (170 μs) sind ziemlich unsicher. Es ist sinnvoller, die Kurve bei einer langen Öffnungszeit (1000 μs) exponentiell nach unten hin fortzusetzen: Der Abnahmekoeffizient t_1 (1000 μs) = 304 μm liefert $p \doteq p_{\text{max}}(170 \mu\text{s}) \exp(-x_F/t_1(1000 \mu\text{s})) = 0.19 \text{ bar} \times \exp(-1132 \mu\text{m}/304 \mu\text{m}) = 4.6 \times 10^{-3} \text{ bar}$. Daraus ergibt sich die Gasdichte $n_{\text{gas}} = 1.1 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Dieser Wert für die Gasdichte liegt etwas unterhalb derer, die sich unmittelbar aus der obigen Kurve ergeben. Unter der Annahme, daß das Heliumgas vollständig ionisiert ist, ist die Elektronendichte doppelt so hoch wie die Gasdichte $n_e \approx 2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$.

4 Experimentelle Resultate

breakdown”) bezeichnet wird. Aufgrund der hohen Intensität werden die Moleküle in der Luft ionisiert und dadurch freie Elektronen erzeugt. Diese entziehen dem Laserfeld Energie, werden beschleunigt, treffen auf benachbarte Moleküle und lösen weitere Elektronen aus (Sekundärionisation). Die Anzahl der Elektronen vervielfacht sich durch weitere Stöße lawinenartig, ein Plasma entsteht. Man sieht das Licht, das bei der Rekombination emittiert wird. Im Fokus ist die Laserintensität am höchsten. Daher ist der optische Luftdurchschlag an den Positionen der jeweiligen Foki am hellsten. Der Targethalter wird nun so verfahren, daß sich die Öffnung der auf ihm befestigten Gasdüse unmittelbar unterhalb der Foki befindet - das Gas strömt von unten nach oben. Die Positionen der Foki stimmen bei einem Hintergrunddruck von $10 \dots 100$ mbar in Luft nicht genau mit denen bei einem Druck von $10^{-4} \dots 10^{-5}$ mbar im Vakuum überein. Der Grund ist, daß durch die Ionisation der Luftmoleküle eine defokussierende Wirkung auftritt, die die Ausbreitung des Laserpulses störend beeinflusst. Daher wird die Kammer auf einen Druck von $10^{-4} \dots 10^{-5}$ mbar evakuiert und mit einer Energie von 290 mJ, welches einer Laserintensität von $3 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$ entspricht, fokussiert.

Die obige Vorgehensweise ist vorteilhaft, da es zweckmäßig ist, zuerst die ungefähre Positionen der Foki zu bestimmen anstatt die arbeitende Gasdüse so lange zu verfahren, bis sie an der richtigen Stelle sitzt - die Düsenöffnung muß sich genau $3 \dots 5$ mm unterhalb der Foki befinden, damit das Plasma zum Leuchten angeregt wird. Sitzt die Gasdüse bereits an der richtigen Stelle, so kann man diesen Schritt überspringen und sofort in den Gasstrahl im Vakuum fokussieren.

Bei einer Öffnungszeit von $500 \mu\text{s}$ herrscht an den Positionen der Foki eine Elektronendichte von etwa $5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ (4.2). Dadurch entsteht ein Plasmaleuchten, welches wie eine (Plasma-)Flamme aussieht (s. Abb. 4.6). An der untersten Stelle der Plasmaflamme sitzen die Foki - dort leuchtet es hell und weiß, und nach oben hin verlaufen die Farben über rot nach blau. Das Plasmaleuchten hat den gleichen Ursprung wie der optische Luftdurchschlag. Verringert man die Gasdichte, d. h. die Anzahl der freien Plasmaelektronen, so wird das Plasmaleuchten so schwach, daß die Foki nicht mehr abgebildet werden können.

Indem das Plasmaleuchten auf die CMOS-Kamera der Überlappobjektive abgebildet wird, lassen sich die Positionen der einzelnen Foki genau bestimmen. Die Fokussier- und Überlappdiagnostik wird so lange verfahren, bis man mit beiden Überlappobjektiven genau auf den Fokus des ersten Parabolspiegels schaut. Da die beiden Überlappobjektiv denselben Punkt beobachten (s. Abb. 3.6), wird dieser Fokus sowohl mit dem horizontalen als auch mit dem vertikalen Überlappobjektiv scharf abgebildet. Die Position der Fokussier- und Überlappdiagnostik bleibt nun fest. Um die Foki zu überlappen, wird der

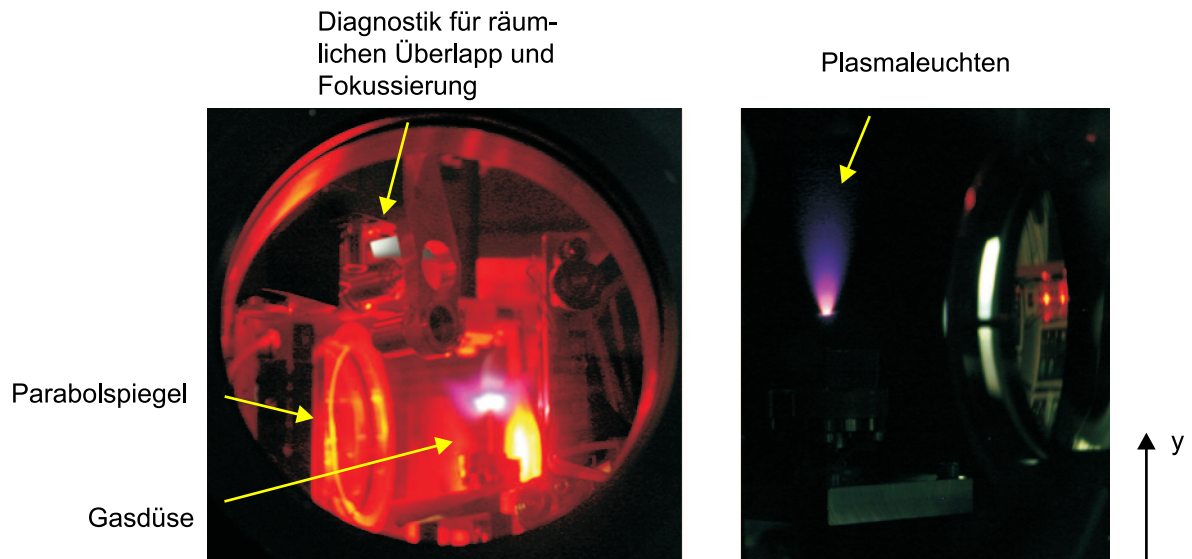


Abbildung 4.6: Fokussierung eines Laserpulses in einen Helium-Gasstrahl. Ein Laserpuls mit einer Intensität von $3 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$ wird in einen Helium-Gasstrahl fokussiert. Der gepulste Gasstrahl ist mit dem Lasersystem synchronisiert (Wiederholrate: 10 Hz). Es entsteht ein hell leuchtendes Plasma, welches mit den Überlappobjektiven abgebildet wird. Aus den mit den Überlappobjektiven aufgenommen Bildern lassen sich die Positionen der Foki (rechtes Bild: hellste Stelle des Plasmaleuchtens am unteren Ende der "Plasmaflamme") ermitteln und dadurch räumlich überlagern. Die Überlappobjektive, welche auf dem Photo leider kaum zu erkennen sind, sind an der Fokussier- und Überlappdiagnostik befestigt.

4 Experimentelle Resultate

zweite Parabolspiegel in x , y , z -Richtung verschoben - beim Verschieben der Parabolspiegel wandern ihre Foki mit. Dieses Wandern wird sowohl mit dem horizontalen als auch mit dem vertikalen Überlappobjektiv beobachtet:

- Beobachtung mit dem horizontalen Überlappobjektiv: Das horizontale Überlappobjektiv schaut in x -Richtung auf den Fokus des ersten Parabolspiegels und bildet diesen in der y , z -Ebene scharf ab. Durch Verfahren des zweiten Parabolspiegels in y , z -Richtung wird der Fokus des zweiten Parabolspiegels genau auf den Fokus des ersten Parabolspiegels gelegt. Weiterhin wird der zweite Parabolspiegel in x -Richtung verfahren und dadurch der Fokus des zweiten Parabolspiegels scharf abgebildet; durch das Verschieben in x -Richtung ändert sich der fokale Abstand zwischen dem Fokus des zweiten Parabolspiegels und dem horizontalen Überlappobjektiv. Beide Foki überlappen.
- Beobachtung mit dem vertikalen Überlappobjektiv: Das vertikale Überlappobjektiv schaut in y -Richtung auf den Fokus des ersten Parabolspiegels und bildet ihn in der x , z -Ebene scharf ab. Durch Verfahren des zweiten Parabolspiegels in x , z -Richtung wird der Fokus des zweiten Parabolspiegels genau auf den Fokus des ersten Parabolspiegels gelegt. Weiterhin wird der zweite Parabolspiegel in y -Richtung verfahren und dadurch der Fokus des zweiten Parabolspiegels scharf abgebildet; durch das Verschieben in y -Richtung ändert sich der fokale Abstand zwischen dem Fokus des zweiten Parabolspiegels und dem vertikalen Überlappobjektiv. Beide Foki überlappen.

Es ist zu bemerken, daß mit der gerade beschriebenen Vorgehensweise nur eines der beiden Überlappobjektive zur Fokusbeobachtung ausreichen würde. Es ist jedoch genauer, mit beiden Überlappobjektive von der Seite und von oben zu beobachten - auch deshalb, weil dabei das unsichere Einstellen der Schärfe entfällt.

Die Abbildung der mit den Überlappobjektiven aufgenommenen Bilder wird kalibriert, indem man einen Draht mit einem Durchmesser von $10\text{ }\mu\text{m}$ von der den jeweiligen Objektiven gegenüberliegenden Seite mit einem Kranz aus Leuchtdioden oder einer Taschenlampe anstrahlt und ihn abbildet. Da die Abbildungswege für beide Überlappobjektive gleich lang sind, ergibt sich sowohl für die mit dem horizontalen als auch mit dem vertikalen Überlappobjektiv aufgenommenen Bilder eine Kalibrierung von $1.3\text{ }\mu\text{m}/\text{pixel}$. Die mit einem gewöhnlichen Auflösungstest gemessene Auflösung beträgt $5\text{ }\mu\text{m}$.

Die aufgenommenen Überlappbilder zeigen (s. Abb. 4.7), daß das fokale Gebiet (engl. : "focal spot area"), welches durch die Plasmemission angedeutet ist, in x -, sowie in y -

4 Experimentelle Resultate

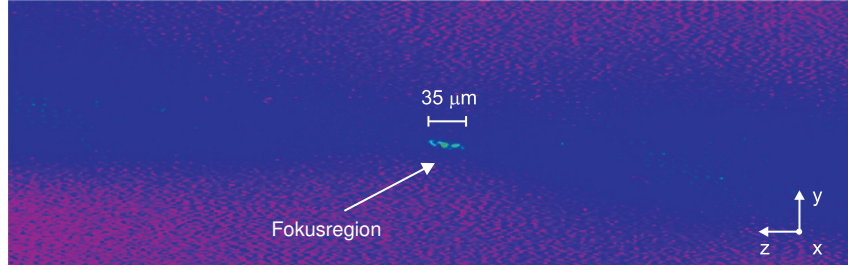


Abbildung 4.7: Überlappbild. Die Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse werden nacheinander durch ein horizontales und ein vertikales Überlappobjektiv auf eine CMOS-Kamera abgebildet. Die räumliche Auflösung der Bilder beträgt $5\,\mu\text{m}$. Das obige Beispielbild ist mit dem horizontalen Überlappobjektiv aufgenommen. Die Gasdichte ist so eingestellt, daß das fokale Gebiet seine kürzeste Ausdehnung in z -Richtung von etwa $35\,\mu\text{m}$ erreicht ($n_e = 5 \times 10^{19}\,\text{W}/\text{cm}^2$). In der Fokusregion (hellblau, grüne und gelbe Bildpunkte) leuchtet das Plasma am hellsten. Die dunkelblauen Bildpunkte zeigen das Intensitätsprofil des Laserstrahls. Es ist zu erkennen, daß der Fokus ziemlich genau in der Strahltaile sitzt (kleinste Ausdehnung in y -Richtung). Der optische Achse des Strahles ist um 3° bzgl. der z -Achse verkippt.

Richtung etwa $5 \dots 10\,\mu\text{m}$ und in z -Richtung wenigstens $35\,\mu\text{m}$ ausgedehnt ist (vgl. Rayleighlänge: $9\,\mu\text{m}$). Da der dielektrische Spiegel, welcher hinter den Überlappobjektiven und vor der CMOS-Kamera angebracht (s. Abb. 3.6), nicht für 1ω -Licht durchsichtig ist, bedeutet das, daß auf den Überlappbildern alle Frequenzen außerhalb der Bandbreite des dielektrischen Spiegels ($\Delta\lambda = 50\,\text{nm}$ bzw. $\Delta\omega = 0.15 \times 10^{15}\,\text{s}^{-1}$) vertreten sind. Die Plasmaemission sieht aus wie eine Nadel, die im wesentlichen in z -Richtung ausgedehnt ist. Die kritische Leistung ist mit einem einzelnen Teilstrahl, welcher nur eine Energie von $50\,\text{mJ}$ (s. Kap. 4.1) besitzt, noch nicht erreicht. Daher ist dies noch *kein* relativistischer Kanal (s. Kap. 2.3.1).

Die Ausdehnung der Plasmaemission läßt sich durch ein Gauß'sches Intensitätsprofil erklären (2.62, 2.63, s. Abb. 2.6). Da die Intensität in der x, y -Ebene transversal zur optischen Achse stark absinkt - wie aus der Charakterisierung der Foki bekannt ist, fällt die Intensität nach einem Radius von $r_0 = W_0/\sqrt{2} \approx 1\,\mu\text{m}$ bzw. einem Durchmesser von $d_0 \approx 2\,\mu\text{m}$ auf das $1/e$ -fache ab - reicht die Intensität bereits nach wenigen Mikrometern nicht mehr aus, um das Plasma zu ionisieren. In z -Richtung ist die Plasmaemission jedoch aufgrund des longitudinalen Intensitätsprofil $I = I(z)$ länger. Die Laserintensität nimmt in der x, y -Ebene mit größerem radialen Abstand von der optischen Achse viel schneller ab als in longitudinale z -Richtung mit größerem Abstand vom Fokus.

4 Experimentelle Resultate

Die Genauigkeit für den räumlichen Überlapp der beiden Foki, welche mit den Überlappbildern erreichbar ist, ist allgemein durch die räumliche Auflösung der Überlappabbildung ($5\text{ }\mu\text{m}$) und die Ausdehnung der Plasmaemission begrenzt. Je ausdehnender die Plasmaemission ist, desto ungenauer ist die räumliche Überlagerung - innerhalb der Ausdehnung der Plasmaemission ist die Lage des Fokus unbestimmt. Aus den Überlappbildern ist daher zu erkennen, daß die Foki in x , y -Richtung höchstens etwa $10\text{ }\mu\text{m}$, d. h. ungefähr $\Delta_{x,y} \approx 5 \times d_0$ auseinander liegen, während sie in z -Richtung $35 \dots 50\text{ }\mu\text{m}$ auseinanderliegen (einzelner Teilstrahl mit einer Energie von 50 mJ bei einer Gasdichte von $5 \times 10^{19}\text{ cm}^{-3}$). D. h. Die Genauigkeit liegt im Mikrometerbereich, und der Abstand der Foki in z -Richtung entspricht noch etwa dem 5-fachen der Rayleighlänge (Rayleighlänge: $9\text{ }\mu\text{m}$). Das mikrometergroße Gebiet der räumlichen Überlagerung heißt im folgenden *gemeinsamer Fokus*.

Da der Aufbau symmetrisch ist und beide Parabolspiegel die gleiche Brennweite besitzen, liegt der gemeinsame Fokus genau in der Mitte zwischen den beiden Parabolspiegeln. Die Situation ist folgende: Der Strahlteiler teilt den Hauptpuls in zwei Teilstrahlen auf. Jeder dieser Teilstrahlen stellt eine Lichtscheibe dar, die nach der Reflexion an den Oberflächen der Parabolspiegel wegen ihrer $(1/e)$ -Pulsdauer von 100 fs (s. Kap. 4.1) in z -Richtung etwa $30\text{ }\mu\text{m}$ ausgedehnt ist. Die beiden Lichtscheiben laufen aufeinander zu, treffen und durchdringen sich. Damit sie sich nicht außerhalb ihres gemeinsamen Fokus treffen, ist es erforderlich, daß sie genau die gleiche Wegstrecke vom Strahlteiler bis zu ihrem gemeinsamen Fokus zurücklegen - und gleichzeitig dort ankommen.

Das Gebiet, in dem sich die beiden Lichtscheiben durchdringen, ist nach der Fokussierung in der x , y -Ebene nur noch so groß wie die $(1/e)$ -Fokusflächen von $6\text{ }\mu\text{m}^2$ (s. Kap. 4.1) und in z -Richtung immer noch so groß wie die Dicke der Lichtscheibe, d. h. etwa $30\text{ }\mu\text{m}$.

Zur Diagnostik des räumlichen und zeitlichen Überlapps werden zusätzlich zu den Überlappbildern Schattenbilder und 2ω -Selbstemissionsbilder aufgenommen (s. Abb. 3.4). Dazu wird zunächst ein Plasma erzeugt, indem die beiden gegenläufigen Laserpulse nacheinander in den Helium-Gasstrahl fokussiert werden. Aufgrund der relativistischen Laserintensität von $3 \times 10^{18}\text{ W/cm}^2$ ($1/e$) in einem Teilstrahl (s. Kap. 4.1) bewegen sich die Elektronen auf einer Achterbahn (s. Abb. 2.3) und senden dabei Licht der Fundamentalen (1ω) sowie der zweiten Harmonischen (2ω) der Laserfrequenz aus. Das nichtlinear gestreute Licht (nichtlineares Thomsonlicht) heißt 1ω - bzw. 2ω -Plasmaemission².

²Es sind vier verschiedene Lichtquellen unterschiedlichen Ursprungs vorhanden: das 1ω -Streulicht, die 1ω - bzw. 2ω -Plasmaemission (Abstrahlung höherer Harmonischer aufgrund der relativistischen Bewegung von Elektronen im intensiven Laserfeld) und das 2ω -Probelicht (Erzeugung der zweiten Harmonischen im nichtlinearen BBO-Kristall).

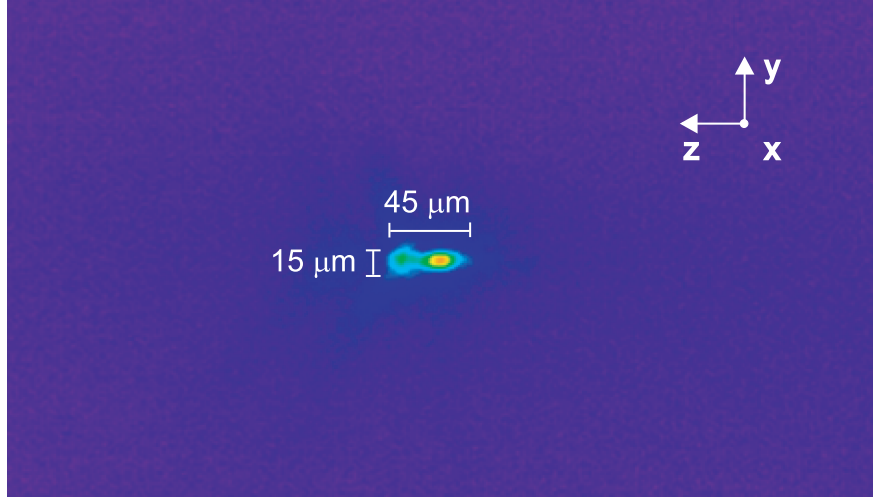


Abbildung 4.8: 2ω -Selbstemission eines Laserpulses. Gezeigt ist die 2ω -Selbstemission bei Fokussierung eines einzelnen Laserpulses in einen Helium-Gasstrahl (Energie des Laserpulses: 50 mJ, hohe Elektronendichte: $5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$). Die Ausdehnung der Plasmaemission beträgt etwa $15 \mu\text{m}$ in y - und $45 \mu\text{m}$ in z -Richtung. An der hellsten Stelle der 2ω -Selbstemission ist der Fokus zu sehen (roter, gelber Fleck); nach außen hin nimmt die Helligkeit gemäß eines Gauß'schen Intensitätsprofils ab. Bei einer Energie von 50 mJ und einer Pulsdauer von 100 fs ist die kritische Leistung für Selbstfokussierung nicht erreicht, so daß keine relativistischen Kanäle entstehen.

Als zu untersuchendes Signal ist die 1ω -Plasmaemission nicht geeignet, da sie vom starken 1ω -Streulicht des Lasers überstrahlt wird. Stattdessen werden 2ω -Bilder beobachtet, da diese mittels eines 2ω -Interferenzfilter vom 1ω -Streulicht des Lasers getrennt werden können - der 2ω -Interferenzfilter ist nur für Licht der zweiten Harmonischen durchlässig.

Die 2ω -Bilder, d. h. die 2ω -Schattenbilder und die Bilder der 2ω -Plasmaemission, werden kalibriert, indem die Gasdüse mit einem äußeren Durchmesser von $1 \mu\text{m}$ mit einer Linse in x -Richtung auf die CCD-Kamera abgebildet wird. Dazu wird die Gasdüse in den gemeinsamen Fokus gefahren. Der Durchmesser der Düse entspricht auf der CCD-Kamera einem Bildausschnitt von 537 pixel in z -Richtung, so daß sich eine Kalibrierung der 2ω -Abbildung von $1.9 \mu\text{m}/\text{pixel}$ ergibt.

Abb. 4.8 zeigt Bilder der 2ω -Selbstemission. Wird bei einer hohen Elektronendichte von $5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ein einzelner Teilstrahl mit einer Energie von 50 mJ in das Plasma fokussiert, so ist die 2ω -Plasmaemission in y -Richtung $10 \dots 20 \mu\text{m}$ und in z -Richtung $35 \dots 60 \mu\text{m}$ ausgelehnt. Die Ausdehnung und die Form der 2ω -Selbstemission schwan-

4 Experimentelle Resultate

ken von Laserschuß zu -schuß innerhalb weniger Mikrometer. Bei der verwendeten Energie von 50 mJ und der gemessenen Pulsdauer von 100 fs ist die kritische Leistung für Selbstfokussierung nicht erreicht. Daher bilden sich keine relativistischen Kanäle aus. Die Helligkeit der 2ω -Selbstemission ist etwa in der Mitte am höchsten und nimmt nach außen hin ab. Dies läßt sich wieder durch ein Gauß'sches Intensitätsprofil erklären (2.62, 2.63, s. Abb. 2.6).

Zur Aufnahme von 2ω -Schattenbildern wird der frequenzverdoppelte Probepuls einstellbarer zeitlicher Verzögerung in x -Richtung durch das Plasma gestrahlt und in der y , z -Ebene mittels einer Linse auf eine CCD-Kamera abgebildet (s. Abb. 3.4). Die Linse steht bezüglich der Ausbreitungsrichtung des Probepulses etwa 30 cm hinter der Fokussposition. An der ansteigenden Intensitätsflanke ($I \sim 10^{10} \text{ W/cm}^2$) des Hauptpulses setzt Multiphotonenionisation des Heliumgases ein, so daß die Elektronendichte steil ansteigt. Es entsteht eine Ionisationsfront, welche in z -Richtung vor dem Hauptpuls herläuft. Dies ist wie bei einem Plug, der Schnee aufschauelt und vor sich herschiebt. Da die Elektronendichte an der Ionisationsfront steil ansteigt, fällt der Brechungsindex steil ab (2.127). Die Ablenkung des 2ω -Probepulses, der in y , z -Richtung einige Millimeter ausgedehnt ist und in x -Richtung auf die CCD-Kamera zuläuft, ist ganz allgemein proportional zum Gradienten des Brechungsindex. Im folgenden soll kurz die Strahlablenkung erklärt werden: Heliumgas besitzt einen Brechungsindex von $n_{\text{He}} = 1.000033$. Für den 2ω -Probepuls lautet der Brechungsindex im Plasma (2.130)

$$n_{2\omega} = \sqrt{1 - n_e/n_{\text{krit}}(2\omega_0)}, \quad (4.21)$$

wobei $n_{\text{krit}}(2\omega_0)$ die kritische Dichte für den frequenzverdoppelten Probepuls ist. Setzt man die im Fokus gemessene Elektronendichte ($n_e = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$) und die kritische Dichte des Probepulses $n_{\text{krit}}(2\omega_0) = 7 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ (Wellenlänge des Probepulses: 400 nm) ein, so ergibt sich für den Brechungsindex im Plasma $n_{\text{pl}} = 0.996$. Die Elektronendichte ist kleiner als die kritische Dichte; somit ist das Plasma unterdicht, und der 2ω -Probepuls propagiert durch das Plasma. Der Probepuls, welcher aus dem Helium kommt und in das Laserplasma eindringt, sieht einen abnehmenden Brechungsindex (von $n_{\text{He}} = 1.000033$ nach $n_{2\omega} = 0.996$, $\Delta n = 4 \times 10^{-3}$) und läuft somit vom optisch dichteren in das optisch dünnere Plasma. Da dies wie eine Zerstreuungslinse wirkt, wird der Probepuls in y -Richtung abgelenkt. Der Probestrahl, welcher in der y , z -Ebene räumlich ausgedehnt ist, kann in einzelne (Probe-)teilstrahlen zerlegt werden. Jeder dieser Teilstrahlen breitet sich nicht geradlinig durch das Plasma aus, sondern wird unterschiedlich stark abgelenkt. Bei größer werdendem Abstand von der x -Achse nimmt die Elektro-

4 Experimentelle Resultate

nendichte exponentiell ab (s. Abb. 4.5), d. h. $n_e(x) > n_e(0)$, und der Brechungsindex nimmt somit zu, d. h. $n(x) < n(0)$. Bezüglich der x -Achse werden somit achsenferne Teilstrahlen weniger stark abgelenkt als achsennahe - dies ist umgekehrt wie bei der Selbstfokussierung. Durchquert der Probestrahl daher das unterdichte Plasma, so entsteht in der y, z -(Abbildungs-)Ebene der CCD-Kamera schließlich ein Schattenbild, welches die Brechungsindexverteilung im Plasma widerspiegelt.

Die mit dem Probepuls aufgenommenen (zeitaufgelösten!) 2ω -Schattenbilder und die Bilder der (zeitintegrierten!) 2ω -Selbstemission sind überlagert. Indem man in die Verzögerungseinheit des Probepulses eine $\lambda/4$ -Platte einbringt, kann man dessen Polarisation um 90° drehen. Die Polarisationssebene des Probepulses (s-polarisiert) steht somit senkrecht zur der des Hauptpulses (p-polarisiert). Dadurch ist es möglich, zwischen 2ω -Schattenbildern und den Bildern der 2ω -Selbstemission zu unterscheiden.

Die Schattenbilder dienen dazu, das Plasma gleichsam zu filmen, wobei die Belichtungszeit eines einzigen Bildes durch die Dauer des Probepulses gegeben ist (100 fs) ist. Die zeitliche Verzögerung des Probepulses bezüglich des Hauptpulses ist mit einer Zeitauflösung von 100 fs veränderlich einstellbar. Man geht so vor, daß man eine bestimmte zeitliche Verzögerung einstellt und einen Schnappschuß des Plasma aufnimmt. Dabei werden jeweils für 10 Laserschüsse 10 zugehörige 2ω -Schattenbilder photographiert, so daß sich Schwankungen von Laserschuß zu -schuß feststellen lassen. Anschließend wird die zeitliche Verzögerung in 100 fs-Schritten verzögert, und es werden wiederum für jede Einstellung 10 Schattenbilder aufgenommen. Die auf diese Weise entstehende Bilderserie zeigt Momentaufnahmen der (Haupt-)Pulsausbreitung in einem zeitlichen Abstand von 100 fs.

Zur zeitlichen Überlagerung der beiden gegenläufigen Laserpulse wird das obige Verfahren genutzt und die zeitliche Verzögerung zwischen dem Probe- und dem Hauptpuls in 100 fs-Schritten geändert. Dabei wird zunächst nur die Ausbreitung des transmittierten Teilstrahles beobachtet und der reflektierte Teilstrahl versperrt ³.

Die Auflösung der CCD-Kamera beträgt 640×480 pixel. Dies entspricht bei der Kalibrierung der 2ω -Abbildung ($1.863 \mu\text{m}/\text{pixel}$) einem Bildausschnitt von $1190 \mu\text{m} \times 890 \mu\text{m}$. D. h. Der transmittierte Puls benötigt 4 ps, um von rechts nach links durch das Bild zu laufen ($30 \mu\text{m} \hat{=} 100 \text{ fs}$). Während dieser Zeit wechselwirkt er mit dem Plasma und erzeugt eine Brechungsindexstruktur, die sich mit der Zeit verändert. Erreicht der Probepuls das Plasma früher oder mehr als 4 ps später als der transmittierte Teilstrahl, so überschneiden sie sich nicht. Daher wird zunächst die zeitliche Verzögerung zwischen dem Probe-

³Im folgenden soll zwischen dem reflektierten und dem transmittierten Teilstrahl, die bei der Reflexion und der Transmission an der Oberfläche des Strahlteilers entstehen, unterschieden werden.

4 Experimentelle Resultate

puls und dem transmittierten Teilstrahl grob eingestellt, bis die Ionisationsfront auf dem Bildausschnitt zu sehen ist - und sich der Probepuls und der transmittierte Teilstrahl überschneiden. Anschließend wird die zeitliche Verzögerung in 100 fs-Schritten geändert, bis die Ionisationsfront die hellste Stelle der 2ω -Selbstemission, d. h. den Fokus, erreicht - die Ionisationsfront wandert wegen der Zeitauflösung durch den Bildausschnitt, während der Fokus an der hellsten Stelle des relativistischen Kanals sitzen bleibt (Zeitintegral). Die Fokusposition ist schließlich höchstens innerhalb der Ausdehnung des relativistischen Kanals in z -Richtung unbestimmt, d. h. weniger als 200 fs (entspricht $60 \mu\text{m}$ maximaler Ausdehnung der 2ω -Selbstemission), (s. Abb. 4.9). Befindet sich die Ionisationsfront des transmittierten Pulses im Fokus, so wird die zugehörige zeitliche Verzögerung als Referenz auf $\Delta\tau_p = 0$ gesetzt.

Als nächstes wird der Weg des reflektierten Pulses geöffnet und derjenige des transmittierten Pulses versperrt. Der Strahlteiler wird parallel zur z -Achse, d. h. unter einem Winkel von 45° zum einfallenden Hauptpuls, verschoben (s. Abb. 4.19). Die Referenzverzögerung bleibt fest (auf Null). Durch das Verschieben des Strahlteilers ändert sich die Wegstrecke, die der reflektierte Puls bis zum gemeinsamen Fokus zurücklegt, während sich die des transmittierten Pulses nicht ändert. Der Strahlteiler führt eine zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau_s$) zwischen dem transmittierten und dem reflektierten Teilstrahl ein. Sie beträgt (s. Abb. 4.19)

$$\Delta\tau_s(45^\circ) = \frac{\Delta x_s}{\cos(\pi/4) c}. \quad (4.22)$$

Die Motorkalibrierung des Strahlteilers von $\Delta x_s = 0.028 \mu\text{m}/\text{Schritt}$ liefert $\Delta\tau_s(45^\circ) = 0.1 \text{ fs}/\text{Schritt}$. Der Strahlteiler wird verschoben, bis sich der reflektierte Teilstrahl auch im Fokus befindet, und die zugehörige zeitliche Verzögerung wird als Referenz für die Strahlteilerverschiebung gesetzt ($\Delta\tau_s = 0$). Da die beiden Pulse die gleiche Wegstrecke zurücklegen, treffen sich gleichzeitig in ihrem gemeinsamen Fokus (s. Abb. 4.10). Der zeitliche Überlapp ist dabei in der Größenordnung der Pulsdauer von 100 fs (im ungünstigsten Fall: 200 fs), d. h. die Pulse sind nun räumlich und zeitlich überlagert (bei einer hohen Elektronendichte von $5 \times 10^{19} \text{ W}/\text{cm}^2$).

Die Genauigkeit des räumlichen Überlapps ist bis zu dieser Stelle durch die hohe Elektronendichte begrenzt und nicht durch die Genauigkeit des experimentellen Aufbaus (räumlicher Überlapp: $0.03 \mu\text{m}/\text{Schritt}$, zeitlicher Überlapp: $0.1 \text{ fs}/\text{Schritt}$, räumliche Auflösung: $5 \mu\text{m}$, zeitliche Auflösung: 100 fs) begrenzt. Die hohe Elektronendichte hat zur Folge, daß die 2ω -Plasmaemission - wie oben erwähnt - in x , y -Richtung bis zu $20 \mu\text{m}$ und insbesondere in z -Richtung bis zu $60 \mu\text{m}$ ausgedehnt ist.

An dieser Stelle werden beide Schließer geöffnet, so daß die Pulse zum ersten Mal

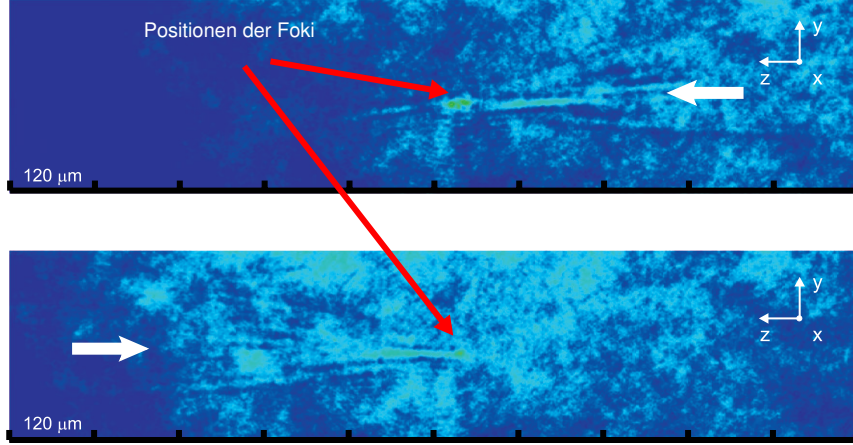


Abbildung 4.9: Schattenbilder des Überlapps. Zwei gegenläufige Pulse werden nacheinander in einen Helium-Gasstrahl fokussiert (Gasdichte: $n_e \approx 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$). Obwohl die 2ω -Selbstemission des lasererzeugten Plasmas mittels eines Polarisationsfilters unterdrückt wird, ist in der Mitte beider Bilder ein heller Fleck zu erkennen. Dieser stammt von der 2ω -Plasmaemission an der Stelle der jeweiligen Foki. Da die Intensität in den Foki am höchsten ist, ist die Plasmaemission dort am hellsten. Die Foki sind bereits räumlich überlagert. Die Schattenbilder sind zu einem festen Zeitpunkt aufgenommen - oben ist ein Schnappschuß des von rechts kommenden unten ein Schnappschuß des von links kommenden Pulses zu sehen. Es sind pfeilartige Strukturen zu erkennen, die zur Mitte der Bilder hin spitzer werden - die Pfeilspitzen geben die Position der Ionisationsfront an. Die Strukturen entstehen durch Ablenkung des Probestrahls aufgrund hoher Plasmagradien. Der Probestrahl durchleuchtet das Plasma in x -Richtung. Die Pfeilspitzen und die hellste Stelle der 2ω -Plasmaemission liegen übereinander, d. h. die Ionisationsfront des jeweiligen Pulses liegt im gemeinsamen Fokus der beiden gegenläufigen Pulse. Die Pulse sind räumlich und zeitlich überlagert.

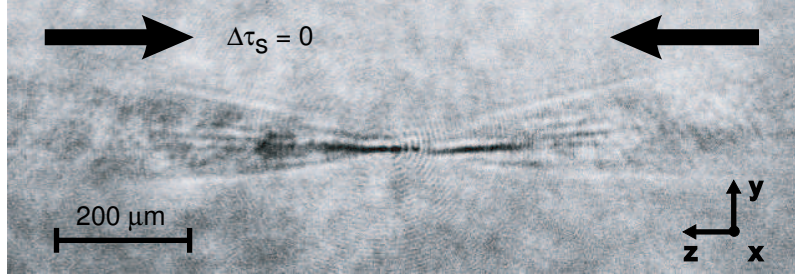


Abbildung 4.10: 2ω -Schattenbild und 2ω -Selbstemission des Überlapps. Von den 2ω -Schattenbildern (Elektronendichte: $5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$) werden geeignete Hintergrundbilder - dabei werden Bilder des Probestrahles aufgenommen, ohne daß der Hauptpuls ein Plasma erzeugt - abgezogen, damit die Strukturen besser sichtbar sind. Die hintergrundsfreien Schattenbilder und die Bilder der 2ω -Selbstemission sind überlagert. Auf dem Schattenbild sind pfeilartige Strukturen zu erkennen, welche zur Bildmitte hin spitz zulaufen. Diese entstehen dadurch, daß der 2ω -Probepuls, welcher in x -Richtung durch das Plasma läuft, aufgrund hoher Plasma-gradienten abgelenkt wird. Für verschwindende zeitliche Verzögerung zwischen dem am Strahlteiler reflektierten und dem transmittierten Teilstrahl treffen sich die beiden Pulse gleichzeitig in ihrem gemeinsamen Fokus. Deutlich zu erkennen sind die relativistischen Kanäle (schwarze, in z -Richtung jeweils etwa $200 \mu\text{m}$ ausgedehnte 2ω -Selbstemission). Das Bild zeigt, daß die Pulse bei einer hohen Elektronendichte nicht bestmöglichst überlagert sind. Die relativistischen Kanäle liegen in y - und in z -Richtung etwas auseinander, und der nach links laufende Teilstrahl läuft unter einem kleinen Winkel zur z -Achse etwas in y -Richtung nach unten. Außerdem sind Ringe holographischen Ursprungs zu erkennen.

4 Experimentelle Resultate

aufeinanderprallen. Dabei wird nicht mit einer Repetitionsrate von 10 Hz gearbeitet, sondern zunächst nur mit Einzelschüssen (engl. : "single-shot mode") und später mit 10 Laserschüssen je Einstellung. Insgesamt werden einige tausend Laserschüsse verwendet.

Nachdem die Pulse bei hoher Gasdichte räumlich und zeitlich überlappen, kann man sich die 2ω -Schattenbilder betrachten. Zunächst wird eine positive zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau_p > 0$) in einem Bereich von $\Delta\tau_p = 0 \dots 500 \text{ fs}$ ($0 \dots 0.5 \text{ ps}$) zwischen dem Probepuls und dem Hauptpuls eingestellt; die Abbildungen 4.11 und 4.12 zeigen Schattenbilder der gegenseitigen Durchdringung.

Bei der Durchdringung der Pulse sind auf jeder Momentaufnahme ineinander liegende konzentrische Ringe zu erkennen, wobei der äußerste Ring einen Durchmesser von mehreren hundert Mikrometern in der y , z -Ebene besitzt. Die Zentren der Ringe breiten sich innerhalb des relativistischen Kanals etwa mit der Lichtgeschwindigkeit in z -Richtung aus; außerhalb des relativistischen Kanals verschwinden sie. Eine Erklärung ist, daß es sich hierbei um eine holographische Abbildung handelt: Der Hauptpuls erzeugt ein leuchtendes Objekt, welches sich in z -Richtung bewegt und durch den Probepuls beleuchtet wird. Von dem kleinen Objekt gehen kugelförmige Wellenfronten aus, die mit den ebenen Wellenfronten des Probestrahls interferieren. Dadurch entsteht auf der CCD-Kamera eine holographische Abbildung. Außerhalb des relativistischen Kanals ist die Intensität des Lasers und daher die Leuchtkraft des Objekts nicht hoch genug - die Ringe verschwinden. Bei einer Wellenlänge des Probepulses von $\lambda_p = 400 \text{ nm}$ sind seine Wellenfronten 400 nm voneinander entfernt. Aufgrund seiner Pulsdauer von etwa 100 fs ist er in Ausbreitungsrichtung rund $30 \mu\text{m}$ ausgedehnt. Das bedeutet, daß etwa 75 Wellenfronten interferieren und Ringe bilden. Diese Zahl stimmt gut mit aus den Schattenbildern beobachteten überein.

Weiterhin werden verschiedene zeitliche Verzögerungen ($\Delta\tau_s = 0 \dots 366 \text{ fs}$, in 122 fs-Schritten) zwischen dem reflektierten und dem transmittierten Teilstrahl eingestellt; Abb. 4.13 zeigt Schattenbilder des Zusammenstoßes. Zuletzt kann man noch Bilder der 2ω -Selbstemission betrachten, die bei der Fokussierung der beiden gegenläufigen Laserpulse entsteht. Bei einer Gesamtenergie der beiden Teilstrahlen von 100 mJ ist die kritische Dichte erreicht, so daß Selbstfokussierung auftritt und relativistische Kanäle zu erkennen sind (s. Abb. 4.14).

Um die Genauigkeit des räumlichen Überlapps in x , y - und besonders in z -Richtung zu vervollkommen, wird die Gasdichte verringert und das relativistische Autokorrelationsignal gemessen, d. h. die zweite Harmonische der nichtlinearen Thomsonsstreuung, welches von der Intensität und daher von dem räumlichen und zeitlichen Überlapp der beiden gegenläufigen Pulse abhängt. Durch Verkürzen der Öffnungszeit der Gasdüse wird

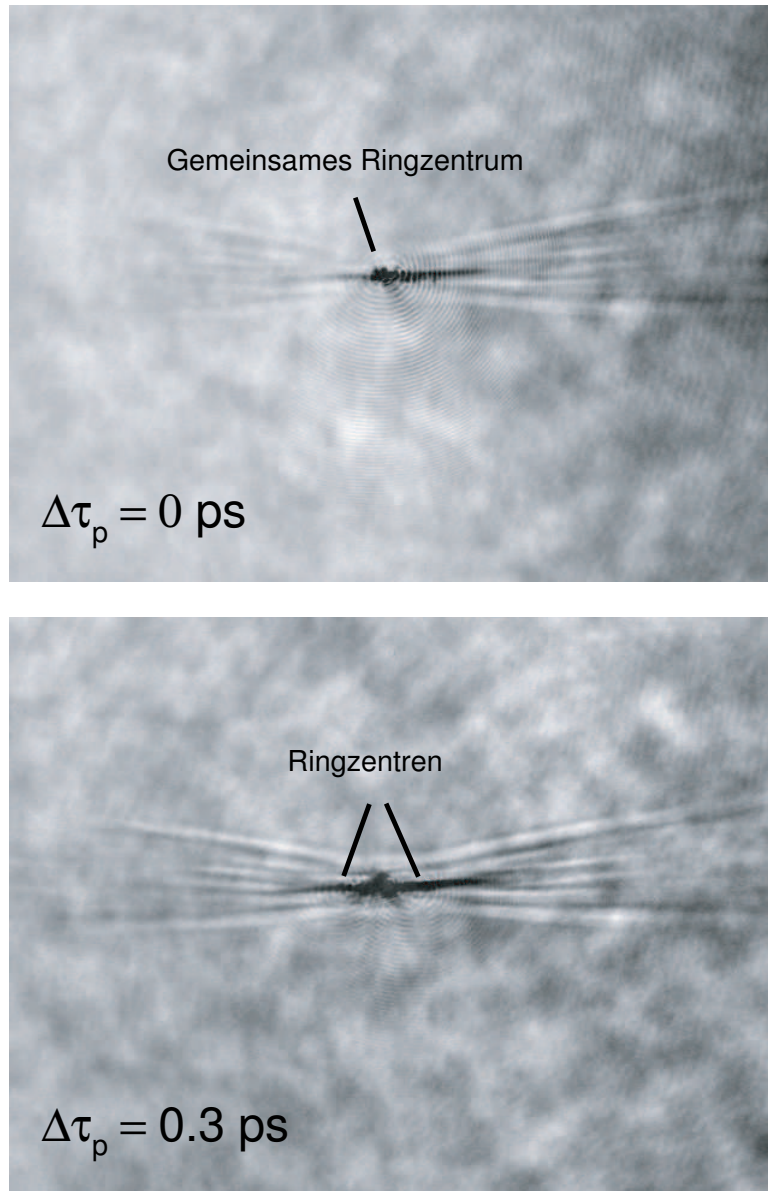


Abbildung 4.11: Durchdringung zweier gegenläufiger Laserpulse 1/2. Die Pulse sind im voraus räumlich und zeitlich überlagert. Die zeitliche Verzögerung zwischen dem Haupt- und dem Probepuls beträgt $\Delta\tau_p = 0 \text{ ps}$ (gleichzeitiges Eintreffen der beiden Pulse im gemeinsamen Fokus) und $\Delta\tau_p = 0.3 \text{ ps}$; $\Delta\tau_p > 0$ bedeutet Beobachtung zu späteren Zeiten. Die (hintergrunds-freien) Schattenbilder und die Bilder der 2ω -Selbstemission sind überla-gert. An den Zentren der (interferierenden) Ringe ist zu erkennen, daß sich die Pulse für spätere Zeiten durchdringen.

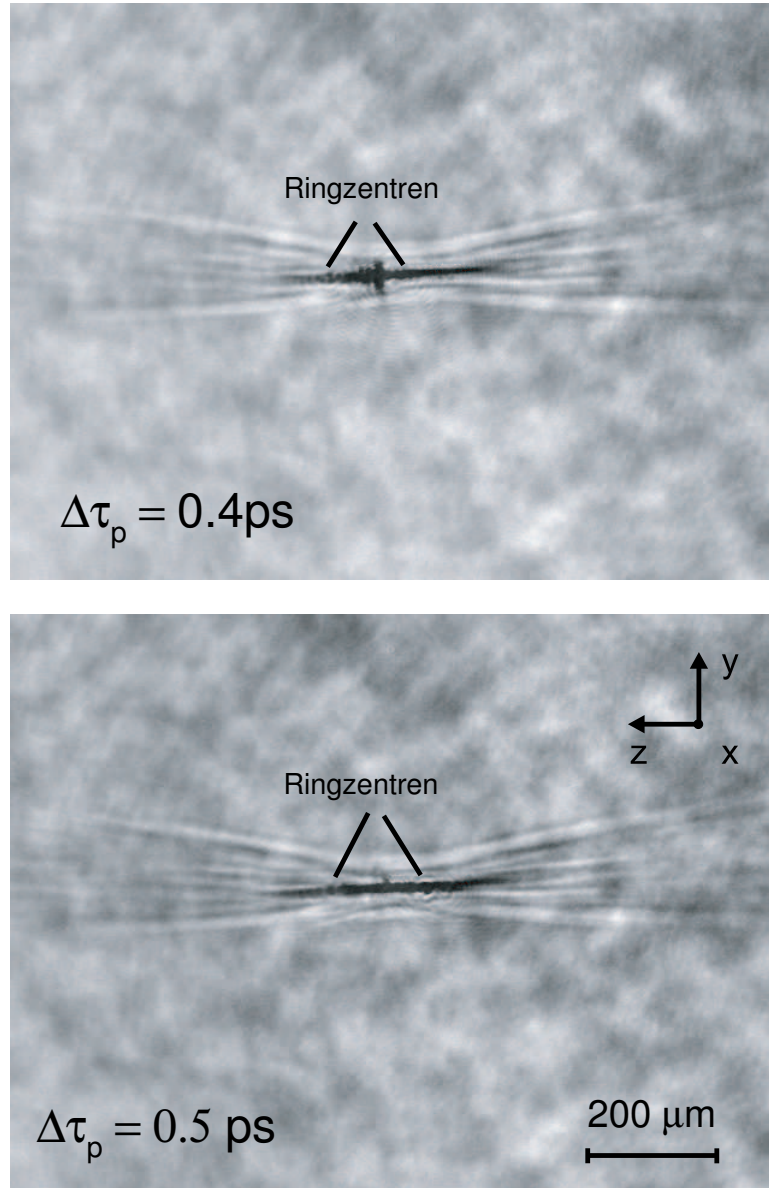


Abbildung 4.12: Durchdringung zweier gegenläufiger Laserpulse 2/2. Die zeitliche Verzögerung zwischen dem Haupt- und dem Probepuls beträgt $\Delta\tau_p = 0.4\text{ ps}$ und $\Delta\tau_p = 0.5\text{ ps}$; $\Delta\tau_p > 0$ gehört zu späteren Zeiten. Nach 0.5 ps wandern sie ca. $150\text{ }\mu\text{m}$ in z -Richtung (vgl. Maßstab).

4 Experimentelle Resultate

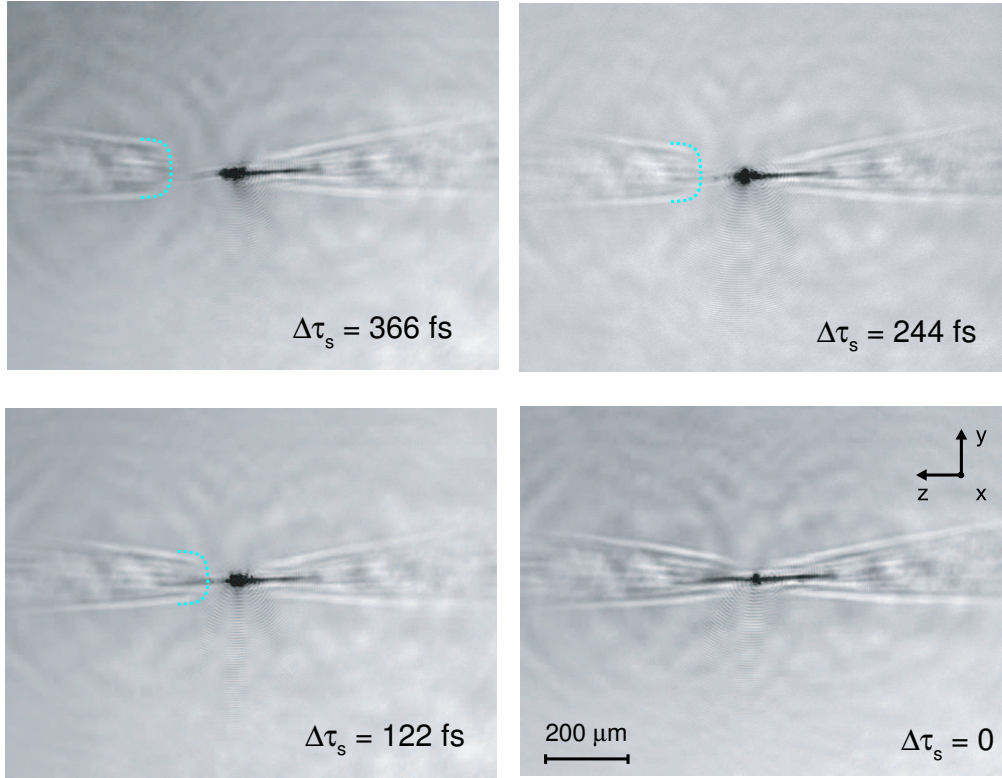


Abbildung 4.13: Schattenbilder der Strahlteilerverschiebung. Durch eine Strahlteilerverschiebung parallel zur z -Achse - dies entspricht einer Verschiebung unter einem Winkel von 45° zur Einfallsrichtung des Hauptpulses - verändert sich die Wegstrecke, die der am Strahlteiler reflektierte Puls durchläuft (von nach links nach rechts laufender Puls). Die Wegstrecke des am Strahlteiler transmittierten Pulses ändert sich nicht (von rechts nach links laufender Puls). Es sind vier 2ω -Schattenbilder zu sehen - aufgenommen für unterschiedliche zeitliche Verzögerungen ($\Delta\tau_s = 0 \dots 366$ fs, in 122 fs-Schritten). Die Schattenbilder sind hintergrundsfrei und mit der 2ω -Selbstemission des Plasmas überlagert. Die relativistischen Kanäle sind deutlich zu erkennen (schwarze, in z -Richtung ausgedehnte 2ω -Selbstemission mit einer Länge von hunderten von Mikrometern sowie dickem Fleck in der Mitte). Es ist zu sehen, wie sich die Ionisationsfront des reflektierten Pulses von links nach rechts ausbreitet (hellblau gestrichelte Linie; ein Zeitschritt von $\Delta\tau_b = 122$ fs entspricht einer Wegstrecke von etwa $36 \mu\text{m}$ in z -Richtung, vgl. $200 \mu\text{m}$ -Maßstab). Für verschwindende zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau_s = 0$) erreichen die Pulse gleichzeitig ihren gemeinsamen Fokus.

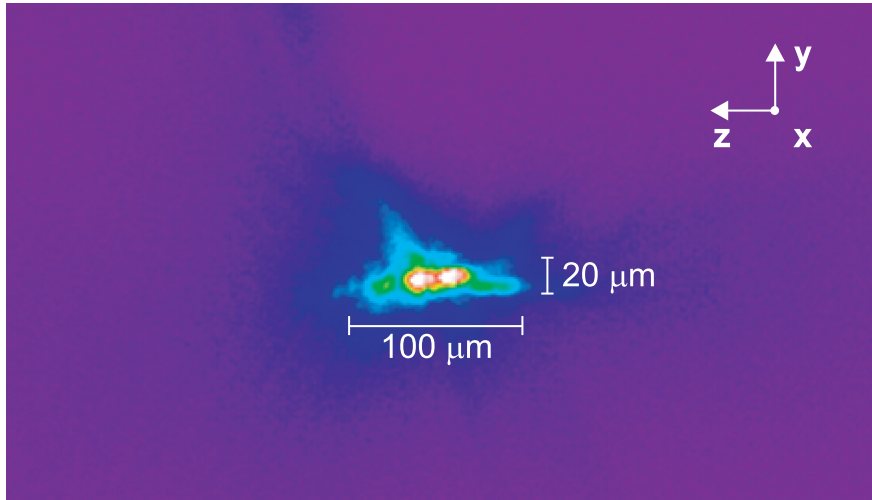


Abbildung 4.14: 2ω -Selbstemission und Selbstfokussierung zweier gegenläufiger Laserpulse. Gezeigt ist die 2ω -Selbstemission des Plasmas bei der Fokussierung zweier gegenläufige Laserpulse in den Helium-Gasstrahl (Energie insgesamt: 100 mJ, hohe Elektronendichte: $5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$). Die Ausdehnung der Plasmaemission beträgt etwa $20 \mu\text{m}$ in y - und $100 \mu\text{m}$ in z -Richtung. An der hellsten Stelle der 2ω -Selbstemission sind die Positionen der Foki zu erwarten (zwei weiße Flecken); nach außen hin nimmt die Helligkeit ab. Da bei einer Energie von 100 mJ und einer Pulsdauer von 100 fs die kritische Leistung für Selbstfokussierung überschritten ist, nimmt insbesondere die Ausdehnung der 2ω -Selbstemission in z -Richtung zu. Es entstehen relativistische Kanäle mit einer Länge von mehreren hundert Mikrometern (Rayleighlänge: $9 \mu\text{m}$).

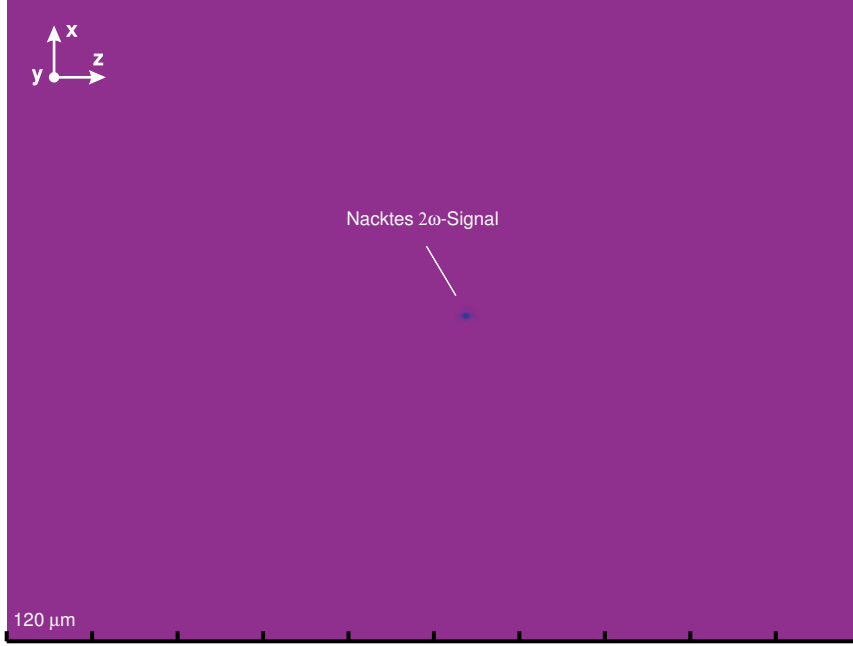


Abbildung 4.15: 2ω -Signal bei niedriger Elektronendichte. Gezeigt ist die 2ω -Selbstemission bei einer niedrigen Gasdichte von $2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ (2ω -Signal). Das nackte 2ω -Signal ist nur wenige Mikrometer in x - und in z -Richtung ausgedehnt. Es dient als relativistisches Autokorrelationssignal zweiter Ordnung.

die Elektronendichte auf $2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ verringert (s. Abb. 4.5).

Das 2ω -Signal wird schwächer, und der relativistischen Kanals wird im wesentlichen in z -Richtung kürzer. Dies ist einsichtig, da die kritische Leistung für Selbstfokussierung umgekehrt proportional zur Elektronendichte ist $P_{\text{krit}} \sim 1/n_e$, und sich bei einer Elektronendichte von $2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ auf $P_{\text{krit}} (n_e = 2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}) = 130 \text{ TW}$ erhöht. In den Experimenten wird jedoch nur eine Laserleistung von 1 TW erreicht. Selbstfokussierung findet daher nicht statt, und das Laserlicht wird nicht mehr entlang der optischen Achse gebündelt. Das 2ω -Signal wird bis zur Detektionsgrenze der CCD-Kamera verringert, bis es schließlich sehr schwach und winzig ist (s. Abb. 4.15).

Das 2ω -Signal ist das zeitintegrierte Signal, welches alle Elektronen, die im intensiven Laserfeld in z -Richtung beschleunigt werden, ausstrahlen. Es wird schwächer, da sich die Elektronenanzahl um 26 Größenordnungen pro Kubikmikrometer ($10^2 \text{ cm}^{-3} = 10^{26} \mu\text{m}^{-3}$) verringert. Je weniger Elektronen vorhanden sind, desto schwächer ist auch die gesamte abgestrahlte Leistung. Da das nackte 2ω -Signal sehr schwach ist, wird es entlang der y -Achse mit einer Integrationsweite von 10 pixel ($\hat{=} 18.6 \mu\text{m}$) in z -Richtung inte-

4 Experimentelle Resultate

griert, d. h. Integration über alle Pixel, die sich in einem Streifen einer Breite von 10 pixel befinden. Das in y -Richtung integrierte sowie zeitintegrierte 2ω -Signal tragen wir räumlich aufgelöst gegen die z -Achse auf (räumliche Auflösung: $5\mu\text{m}$). Dabei werden jeweils 10 Bilder des 2ω -Signals unter denselben experimentellen Bedingungen aufgenommen - 10 Laserschüsse je Einstellung (engl. : "set").

Man erkennt, daß die Kurve des 2ω -Signals zwei Intensitätsmaxima zeigt, die in z -Richtung etwa $44\mu\text{m}$ voneinander entfernt sind (s. Abb. 4.16), und ungefähr gleich hoch sind. Die Ausdehnung in z -Richtung beträgt insgesamt $60\mu\text{m}$. Die beiden Intensitätsmaxima können als die Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse gedeutet werden. Da der Abstand der Foki größer ist als die Pulsbreite ($\approx 30\mu\text{m}$), wechselwirken sie nicht miteinander, d. h. sie sind nicht korreliert. Zwischen den beiden Peaks verschwindet die Intensität fast vollständig.

Nach Verschieben des Strahlteilers verschmelzen beide Intensitätsmaxima zu einem einzigen Intensitätsmaximum (s. Abb. 4.16b). Die FWHM-Pulsbreite des einzelnen Peaks liegt unterhalb der Pulsbreite ($< 30\mu\text{m}$). Das bedeutet, daß die Pulse räumlich und zeitlich überlappt sind. Die räumliche Auflösung in z -Richtung beträgt $5\mu\text{m}$. Die Integration entlang der y -Achse hat keinen Einfluß auf die räumliche Auflösung in z -Richtung. Die Auswertung zeigt, daß die Intensität des 2ω -Signals von Laserschuß zu -schuß um bis zu 100 % schwankt

$$|S_{2\omega,i}(z) - S_{2\omega,j}(z)| \leq 100\%, \quad (4.23)$$

wobei $S_{2\omega,i}(z)$ und $S_{2\omega,j}(z)$ diejenigen Kurven des 2ω -Signals sind, die zu verschiedenen Laserschüssen gehören. Aufgrund der hohen Schwankung wird über sämtliche Laserschüsse eines Sets gemittelt gemäß

$$\overline{S_{2\omega}(z)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S_{2\omega,i}(z)}{n}, \quad (4.24)$$

wobei $S_{2\omega,i}(z)$ die Kurve des 2ω -Signals ist, die zu einem bestimmten Laserschuß gehört, und n die Gesamtanzahl der Laserschüsse in einem Set bezeichnet. Aus der gemittelten Kurve des 2ω -Signals eines Sets, d. h. $\overline{S_{2\omega}(z)}$, ergibt sich die z -Position (z_{max}) und die Höhe $\overline{S_{2\omega}(z_{\text{max}})}$ des Intensitätsmaximums

$$\overline{S_{2\omega}(z)} \doteq \max \rightarrow z_{\text{max}}, \overline{S_{2\omega}(z_{\text{max}})}. \quad (4.25)$$

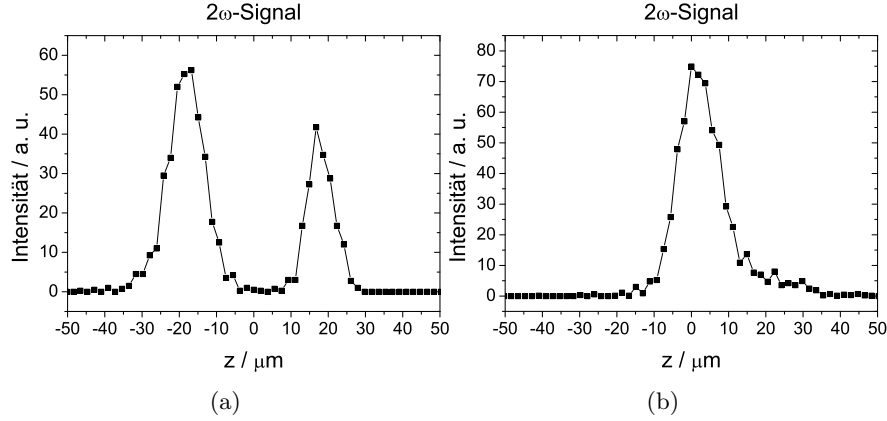


Abbildung 4.16: Überlapp der beiden gegenläufigen Laserpulse. Die Intensität des 2ω -Signals ist gegen die z -Achse aufgetragen. Das 2ω -Signal ist über sämtliche Laserschüsse derselben Einstellung gemittelt, in y -Richtung mit einer Integrationsbreite von $10 \text{ pixel} \hat{=} 18.6 \mu\text{m}$ integriert und in z -Richtung mit einer Genauigkeit von $5 \mu\text{m}$ räumlich aufgelöst. a) Zwei Intensitätsmaxima (Peaks) mit einem Abstand von $44 \mu\text{m}$ auf der z -Achse sind zu erkennen (maximale Ausdehnung in z -Richtung: $\approx 60 \mu\text{m}$). Die Intensitätsmaxima lassen sich als Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse deuten. Der Abstand der beiden Foki größer als die Pulsbreite ($\approx 30 \mu\text{m}$) ist, so daß die Pulse nicht miteinander wechselwirken. Die Position $z = 0$ zeigt die Mitte der beiden Peaks an. Die Peakhöhen unterscheiden sich um etwa 30 % (Foki liegen nicht genau symmetrische zur y -Achse des Gasstrahl). Zwischen beiden Peaks verschwindet die Intensität fast vollständig. b) Nach Verschieben des Strahlteilers verschmelzen beide Intensitätsmaxima zu einem einzigen Intensitätsmaximum. Die Pulsbreite (FWHM) liegt unterhalb der Pulsbreite ($< 30 \mu\text{m}$). Die Pulse sind räumlich und zeitlich überlappt (Autokorrelation).

4 Experimentelle Resultate

Zur Bestimmung der Peakposition und -höhe wird ein Programm verwendet, welches einen quadratischen, polynomialen Fit in der Gegend des Intensitätsmaximums durchführt ("Labview 7: Peak Detector"). Als Fehler(-balken), sowohl für die Peakposition (σ_{pos}) als auch die Peakhöhe (σ_{hhe}), wird die Standardabweichung angegeben. Dazu werden zunächst die Mittelwerte (μ_{pos} , μ_{hhe}) der Peakpositionen und -höhen bestimmt

$$\mu_{\text{pos}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i}{n}, \mu_{\text{hhe}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S_i}{n}, \quad (4.26)$$

wobei z_i die Peakposition und S_i die Peakhöhen sind, die zu einzelnen Laserschüssen gehören. Anschließend wird die jeweilige Standardabweichung berechnet gemäß

$$\sigma_{\text{pos}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(z_i - \mu_{\text{pos}})^2}{n-1}}, \sigma_{\text{hhe}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(S_i - \mu_{\text{hhe}})^2}{n-1}}. \quad (4.27)$$

Durch Verschieben des zweiten Parabolspiegels lassen sich die Foki der beiden gegenläufigen Pulse schließlich mit einer hohen Genauigkeit von $5 \mu\text{m}$ in z -Richtung (!) überlagern.

Um dies zu verdeutlichen, wird die Peakposition (z_{max}) gegen die z -Position des zweiten parabolischen Spiegels aufgetragen. Man erkennt, daß sich der Fokus des ersten Parabolspiegels nicht ändert, während der Fokus des zweiten Parabolspiegels in z -Richtung wandert (s. Abb. 4.17). Die Foki liegen zuerst etwa $44 \mu\text{m}$ auseinander, und es sind jeweils zwei Intensitätsmaxima zu sehen. Verschiebt man die Parabolspiegel um $\Delta z_{p2} = 12 \mu\text{m}$ aufeinander zu, so verringert sich der Abstand der beiden Foki auf etwa $35 \mu\text{m}$, und bei weiterer Verschiebung verschmelzen die Peaks zu einem einzigen. Die Fehler für die Peakpositionen ergeben sich aus der Standardabweichung (σ_{pos}) für verschiedene Laserschüsse derselben Einstellung. Die Meßgenauigkeit der Peakposition ist kleiner als $10 \mu\text{m}$. Schließlich überlappen sich die Foki mit einer Genauigkeit von etwa $\Delta_{\text{ueb}} = 5 \mu\text{m}$ in z -Richtung.

Schließlich wird der Strahlteiler parallel zur z -Achse verschoben und gezeigt, daß die Pulse bestmöglichst überlagert sind. Zur quantitativen Auswertung wird die Peakhöhe $\overline{S_{2\omega}(z_{\text{max}})}$ gegen die zeitliche Verzögerung $\Delta\tau_s$ aufgetragen, die die Strahlteilerverschiebung zwischen dem transmittierten und dem reflektierten Strahl verursacht. Dabei wird über sämtliche Laserschüsse einer Einstellung gemittelt. Da das Signal schwächer wird, läßt sich dies als relativistische Mehrschußautokorrelation interpretieren (s. Abb. 4.18). Bei der Strahlteilerverschiebung tritt nur ein kleiner Parallelversatz des reflektierten Strahls von $90 \mu\text{m}$ auf, d. h. der reflektierte Strahl trifft höchstens $90 \mu\text{m}$ seitlich versetzt auf den Parabolspiegel. Da die Breite des Strahls etwa 70 mm und die Brennweite des

4 Experimentelle Resultate

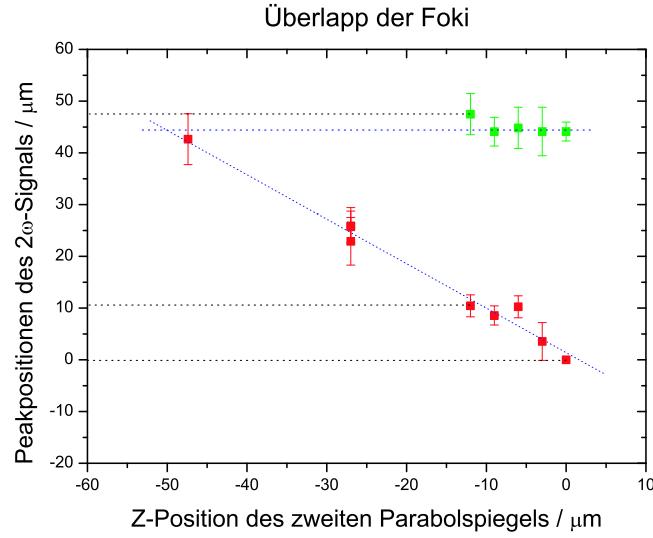


Abbildung 4.17: Ueberlapp der Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse. Die Peakpositionen des 2ω -Signals (z_{\max}) sind gegen die Verschiebung des zweiten Parabolspiegels (Δz_{p2}) in z -Richtung aufgetragen. Eine negative Verschiebung $\Delta z_{p2} < 0$ bedeutet, daß sich die Parabolspiegel aufeinander zu bewegen. Das 2ω -Signal ist über sämtliche Laserschüsse derselben Einstellung gemittelt, in y -Richtung mit einer Integrationsbreite von $10 \text{ pixel} \hat{=} 18.6 \mu\text{m}$ integriert und in z -Richtung mit einer Genauigkeit von $5 \mu\text{m}$ räumlich aufgelöst. Die grünen Punkte zeigen die Fokusposition des ersten Parabolspiegels, während die roten Punkte die des zweiten Parabolspiegels zeigen. Zu Beginn liegen die Foki etwa $44 \mu\text{m}$ auseinander, und es sind jeweils zwei Intensitätsmaxima (Peaks) zu sehen, d. h. sowohl grüne als auch rote Punkte. Bei einer Verschiebung von $\Delta z_{p2} = -12 \mu\text{m}$ beträgt der Abstand der beiden Foki etwa $35 \mu\text{m}$ (scharze gestrichelte, waagrechte Linien), und bei weiterer negativer Verschiebung ist nur noch ein Peak vorhanden. Beim Verschieben des zweiten Parabolspiegels ändert sich die Fokusposition des zweiten Parabolspiegels in guter Näherung linear (blau gestrichelt schräge Gerade), während die Fokusposition des ersten Parabolspiegels im wesentlichen unverändert bleibt (blau gestrichelte, waagrechte Gerade). Die Fehler für die Peakpositionen ergeben sich aus der Standardabweichung (σ_{pos}) für verschiedene Laserschüsse derselben Einstellung; die Standardabweichung ist für jeden Meßpunkt in positive sowie in negative Richtung eingetragen. Die Meßungenauigkeit der Peakposition ist kleiner als $10 \mu\text{m}$. Die Foki überlappen schließlich mit einer Genauigkeit von $\lesssim 5 \mu\text{m}$, d. h. der letzte rote Meßpunkt (am weitesten links) ist weniger als $5 \mu\text{m}$ von der waagrechten blau gestrichelten Linie entfernt.

4 Experimentelle Resultate

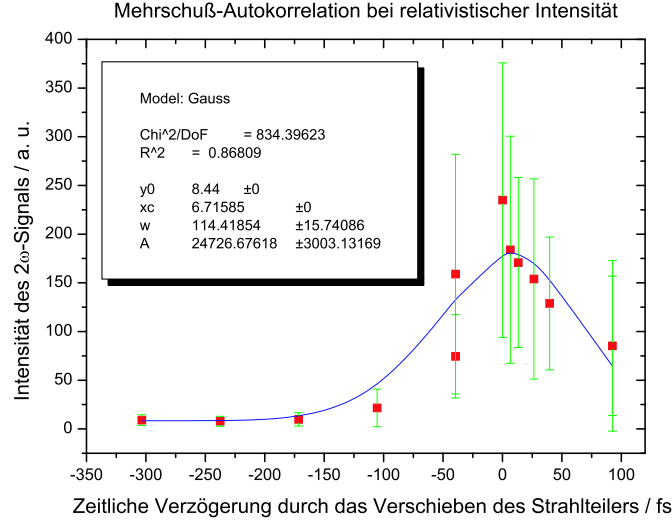


Abbildung 4.18: Mehrschußautokorrelationssignal bei relativistischer Intensität. Die Intensität des 2ω -Signals ist gegen die zeitliche Verzögerung aufgetragen, welche durch das Verschieben des Strahlteilers parallel zur z -Achse entsteht. Der eingeführte zeitliche Verzögerung zwischen dem reflektierten und transmittierten Strahl beträgt $\Delta\tau_s = \Delta x_s / \cos(45^\circ) c$, wobei Δx_s der Gangunterschied zwischen beiden Strahlen ist. Das 2ω -Signal ist über sämtliche Laserschüsse derselben Einstellung gemittelt, in y -Richtung mit einer Integrationsbreite von $10 \text{ pixel} \hat{=} 18.6 \mu\text{m}$ integriert und in z -Richtung mit einer Genauigkeit von $5 \mu\text{m}$ räumlich aufgelöst. Der bestmögliche Überlapp ist durch $\Delta\tau_s = 0 \text{ fs}$ angedeutet. Positive sowie negative zeitliche Verzögerungen führen zu einer Abnahme der Intensität des 2ω -Signals; die Pulse treffen sich nicht mehr in ihrem gemeinsamen Fokus, sondern außerhalb. Die Kurve läßt sich als Mehrschußautokorrelation deuten und durch eine Gauß'sche Kurve der Form $y = y_0 + A/w\sqrt{\pi/2} \exp\left(-2(x - x_c)^2/w^2\right)$ annähern. Der Korrelationsparameter $w = (114 \pm 16) \text{ fs}$ liefert eine Pulsdauer von $\tau_{\text{FWHM}} = w\sqrt{\ln 4} = (134 \pm 19) \text{ fs}$. Die Fehler für die Peakpositionen ergeben sich aus der Standardabweichung (σ_{hhe}) für verschiedene Laserschüsse derselben Einstellung; die Standardabweichung ist für jeden Meßpunkt in positive sowie in negative Richtung eingetragen. Die Fehlerbalken sind riesig. Bei $\Delta\tau_{\text{bs}} = 0$ ist der Fehlerbalken länger als das Intensitätsmaximum ($\approx 120\%$). Da der R^2 -Parameter ($R^2 = 0.87$) wesentlich kleiner als Eins ist, ist die Näherung ziemlich schlecht.

Parabolspiegels jedoch 120 mm betragen, ändern sich die Winkel der im Fokus ankommenden Strahlen nur unwesentlich. Die Fokussierung bleibt daher unverändert, und es entsteht keine Phasenmodulation (s. Abb. 4.19).

4.4 Einzelschuß-Autokorrelation bei relativistischer Laserintensität

Da die beiden gegenläufigen Pulse mit hoher Genauigkeit überlappen, kann das zeitintegrierte 2ω -Signal als relativistisches Autokorrelationssignal gedeutet werden. Mit einem Polarisationsfilter wird überprüft, daß das 2ω -Signal - wie es die Theorie vorausagt - in Ausbreitungsrichtung der gegenläufigen Laserpulse, d. h. in z -Richtung, linear polarisiert ist. Aufgrund der räumlichen Auflösung von $5 \mu\text{m}$ in z -Richtung ist die Autokorrelation nicht interferometrisch. Für $a_0 \lesssim \sqrt{2}$ ist es möglich, die relativistischen Bewegungsgleichungen eines Elektrons, welches sich in einem intensiven Laserfeld befindet, in störungstheoretischer Näherung zu lösen. Die näherungsweise Behandlung der Abstrahlung eines relativistischen Elektrons zeigt, daß das 2ω -Signal in einer laufenden und einer stehenden elektromagnetischen Welle gleich ist, und es kommt heraus, daß das Autokorrelationssignal ein nichtlinearer optischer Effekt zweiter Ordnung in der Intensität ist $S_{2\omega} \sim I^2$. Abb. 4.19 verdeutlicht noch einmal die Meßmethode der relativistischen Autokorrelation.

Zur Wiederholung werden noch einmal die wichtigsten Formeln zur Auswertung angegeben. Das gesamte elektrische Feld ist die Summe der beiden gegenläufigen Laserpulse

$$E(r, z, z_1, \Delta\tau) = E_L(r, z, t) + E_L(r, z - z_1, t - \Delta\tau), \quad (4.28)$$

wobei E_L bzw. E_R die elektrischen Felder des nach rechts bzw. des nach linkslaufenden Pulses ist. E_L ist das elektrische Feld des Pulses, welcher seinen Fokus bei $z = 0$ zur Zeit $t = 0$ erreicht. E_R ist das elektrische Feld des Pulses, dessen Fokus an der Stelle $z = z_1$ sitzt und der gegenüber dem Feld des anderen Pulses um $\Delta\tau = \Delta\tau_s$ verzögert ist. Das über den Raum und die Zeit integrierte 2ω -Signal läßt sich schreiben als

$$S(z, z_1, \Delta\tau) \sim \int_0^\infty 2\pi r dr \int_{-\infty}^{+\infty} dt |E^2(r, z, z_1, t, \Delta\tau)|^2 \quad (4.29)$$

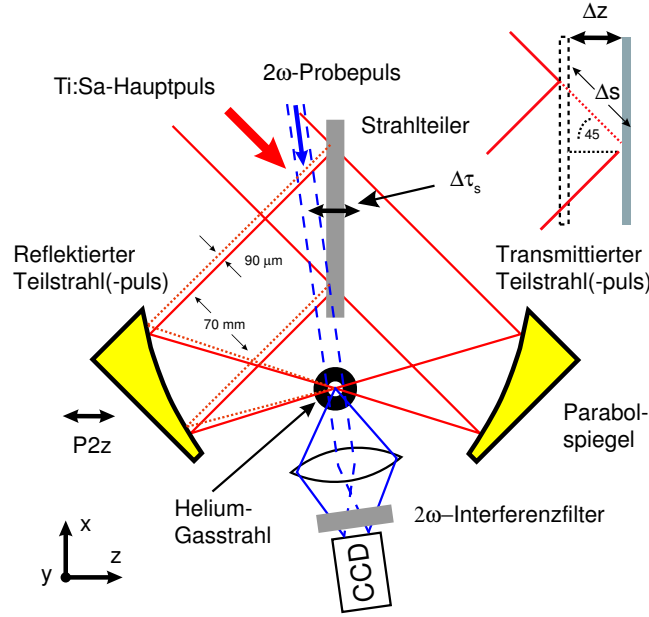


Abbildung 4.19: Relativistische Autokorrelation. Der Strahlteiler teilt den Hauptpuls (rote Linien) in zwei Teilstrahlen auf (rote Linien, durchgezogen), die unter einem Winkel von 180° in den Helium-Gasstrahl laufen. Der frequenzverdoppelte Probepuls (blaue Linien, gestrichelt) wird genutzt, um die Pulse mittels zeitaufgelöster Aufnahme von Schattenbildern im voraus zu überlagern. (Zeitintegriert) gemessen wird die zweite Harmonische der nichtlinearen Thomsonstreuung, die mittels einer Linse auf die CCD-Kamera (blaue durchgezogene Linien). Das durch die relativistische Bewegung der Elektronen entstehende 2ω -Signal dient als relativistisches Autokorrelationssignal zweiter Ordnung. Zur Untersuchung des 2ω -Signals werden im wesentlichen der Strahlteiler und der zweite Parabolspiegel parallel zur z -Achse verschoben. $\Delta\tau$ ist die durch den Strahlteiler eingeführte zeitliche Verzögerung zwischen den beiden Teilstrahlen. Der Strahlteiler wird so verschoben, daß insgesamt nur ein kleiner Parallelversatz des reflektierten Strahls (durchgezogene und gestrichelte rote Linien, linker Teilstrahl) von $90\,\mu\text{m}$ auftritt. Aufgrund einer Breite des reflektierten Strahls von $70\,\text{mm}$ und einer Brennweite des Parabolspiegels von $120\,\text{mm}$, ändern sich die Winkel der im Fokus eintreffenden Teilbündel des reflektierten Strahls wenig. Da die Autokorrelationsmessung nicht interferometrisch ist, ist die im Fokus entstehende Phasenmodulation nicht von Bedeutung. Die Verschiebung des Strahlteilers in z -Richtung (Δz) führt zu einer veränderten Wegstrecke (Δs) des reflektierten Strahls (rot gestrichelte Linie, rechts oben). Da die Wegstrecke des transmittierten Strahls gleich bleibt, führt dies zu einem Gangunterschied von Δs zwischen den beiden Teilstrahlen. Der Gangunterschied $\Delta s = \Delta z / \cos(45^\circ)$ läßt sich über $\Delta\tau_s = \Delta s / c$, d. h. $100\,\text{fs} \hat{=} 30\,\mu\text{m}$, in die zeitliche Verzögerung $\Delta\tau_s$ umrechnen.

4 Experimentelle Resultate

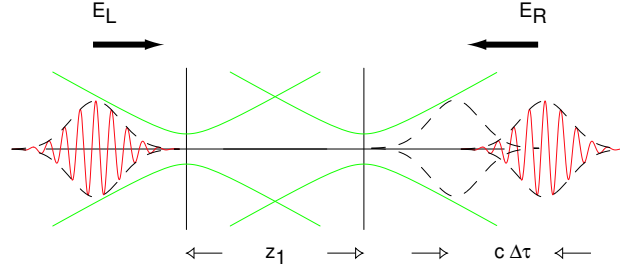


Abbildung 4.20: Meßprinzip der relativistischen Autokorrelation. Es sind verschiedene Möglichkeiten für die Überlagerung zweier gegenläufiger Pulse aufgezeigt. Ihre optischen Achsen liegen übereinander. Die grünen Kurven zeigen zwei Gauß'sche Strahlen, deren Foki eine Strecke von z_1 voneinander entfernt liegen. Der von rechts kommende Gauß'sche Puls (E_R) ist gegenüber dem von links kommenden Gauß'schen Puls (E_L) um $\Delta\tau$ zeitlich verzögert.

Integration über die Interferenzterme und Integration liefert

$$S_{2\omega}(z, z_1, \Delta\tau) \sim \frac{I_{0L}^2}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} + \frac{I_{0R}^2}{1 + \left(\frac{z-z_1}{z_0}\right)^2} + \frac{4I_{0L}I_{0R}}{1 + \left(\frac{z-z_1/2}{z_0}\right)^2 + \frac{z_1^2}{4z_0^2}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z - z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \right] \quad (4.30)$$

wobei I_{0L} and I_{0R} die Intensitäten des nach rechts bzw. des nach links laufenden Laserpulses, z_0 die Rayleighlänge des Gauß'schen Strahles und τ_L die halbe $1/e$ -Pulsdauer der Gauß'schen Feldeinhüllenden (zeitliches Gauß'sches Profil) sind. Die FWHM-Pulsdauer der Intensität (τ_{FWHM}) und die halbe $1/e$ -Pulsdauer (τ_L) sind über $\tau_{FWHM} = \tau_L \sqrt{2 \ln 2}$ verknüpft (7.307). Für eine ebene Welle ($z_0 \rightarrow \infty$), einem gemeinsamen Fokus der beiden Strahlen ($z_1 = 0$) und gleichen Intensitäten des nach rechts und des nach links laufenden Pulses ($I_{0L} = I_{0R} = I_0$) vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$S_{2\omega}(z, \Delta\tau) \sim 2I_0^2 \left[1 + 2 \exp \left(-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z}{c} - \frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \right) \right]. \quad (4.31)$$

Befinden sich die Foki an verschiedenen Stellen auf der optischen Achse, so treten zwei verschiedene Situationen auf (s. Abb. 4.20):

4 Experimentelle Resultate

- Überlappende Foki: Überlappen beide Foki bei $z = 0$, so treffen sich die Pulse bei der Position, die durch die Strahlteilerposition festgelegt ist (s. Abb. 4.21a). Für $\Delta\tau = 0$ durchdringen sich die beiden Pulse genau im Fokus. In diesem Fall ist das 2ω -Signal maximal

$$S_{2\omega}(z = 0, \Delta\tau = 0) \sim 6I_0^2.$$

Für $\Delta\tau \neq 0$ überlappen sich die Foki außerhalb des Fokus, so daß das Signal schwächer wird (s. Abb. 4.21b).

- Nichtüberlappende Foki: Befinden sich die Foki an verschiedenen Positionen $z = 0$ und $z = z_1$, so erscheinen zwei Intensitätsmaxima, die ungefähr gleich hoch sind. Jeder der beiden Pulse erzeugt seinen eigenen Peak, wenn die Bedingung $\Delta\tau \gg z_1/c$ erfüllt ist, wobei $\Delta\tau$ die zeitliche Verzögerung zwischen den beiden Pulsen ist (s. Abb. 4.22a). Überlappen sich die Pulse in einem der beiden Foki oder an einer anderen Stelle, so besteht das Signal entweder aus einem oder aus zwei Peaks (s. Abb. 4.22b). In Abb. 4.21 wird das gemessene 2ω -Signal für $z_1 = 0$, d. h. für überlappende Foki, mit den nach Gl. (4.30) ermittelten Kurven verglichen. Es zeigt sich, daß die Meßpunkte sowohl für verschwindende zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau = 0$) als auch für die beiden 2ω -Signale, die zu einer zeitlichen Verzögerung von $\Delta\tau = \pm 66$ fs hervorragend mit den berechneten Kurven übereinstimmen. Aus den genäherten Kurven werden die FWHM-Pulsdauer τ_{FWHM} und die Rayleighlänge z_0 ermittelt:

$$\tau_{\text{FWHM}} = (112 \pm 11) \text{ fs} \quad (4.32)$$

$$z_0 = (9 \pm 1) \mu\text{m} \quad (4.33)$$

Abb. 4.22b zeigt die 2ω -Signale für Foki, welche nicht an derselben Stelle sitzen. Die schwarze Kurve stellt das 2ω -Signal dar, das gemessen wird, falls die Foki $z_1 = 45 \mu\text{m}$ voneinander entfernt sind und die zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau$) zwischen den beiden gegenläufigen Pulse so eingestellt ist, daß sie sich im linken Fokus ($z = 0$) zeitlich überschneiden (s. Abb. 4.22a). Bewegt man die Fokusposition zur Stelle $z = 22 \mu\text{m}$, so ergibt sich ein symmetrisches Signal (s. Abb. 4.22b, rote Kurve).

Die aus der relativistischen Autokorrelationsmessung zweiter Ordnung ermittelte FWHM-Pulsdauer (τ_{rel}) stimmt innerhalb der Fehlergrenzen mit der aus der klassischen Autokorrelationsmessung dritter Ordnung ermittelten FWHM-Pulsdauer (τ_{klass} , s. Kap. 4.1)

4 Experimentelle Resultate

überein.

$$\tau_{\text{rel}} = (112 \pm 11) \text{ fs} \quad (4.34)$$

$$\tau_{\text{klass}} = \begin{pmatrix} 84 & +17 \\ & -8 \end{pmatrix} \text{ fs.} \quad (4.35)$$

Die relativistische Autokorrelationsmessung zur Bestimmung der Pulsdauer - einem wesentlichen Parameter für Experimente auf dem Gebiet der relativistischen Laser-Plasma-Physik - ist aus folgenden Gründen genauer als die klassische:

1. Bei der klassischen Autokorrelationsmessung ist es nicht möglich, die Pulsdauer unmittelbar im Fokus zu bestimmen, da die verwendeten nichtlinearen Kristalle bei relativistischen Laserintensitäten zerstört würden.
2. Bei der klassischen Autokorrelation wird nur ein kleiner Fleck des gesamten Strahlquerschnitts von $(2 \times 2) \text{ mm}^2$ genutzt - der FWHM-Durchmesser des gesamten, aufgeweiteten Strahlprofiles beträgt etwa 40 mm. D. h. Ein großer Teil der Energie, welche sich im Fokus sammeln und zur Intensität beitragen würde, geht nicht unmittelbar in die Messung ein. Stattdessen wird vorausgesetzt, daß sie unabhängig von der ausgewählten Stelle innerhalb des Strahlquerschnittes ist.

Die relativistische Autokorrelationsmessung ist somit zu bevorzugen. Da der Aufbau sowie die Ausrichtung des Strahlteilers und der beiden Parabolspiegel ziemlich aufwendig ist, wäre es zweckmäßig, einen dauerhaften, fest eingebauten Aufbau zu verwirklichen.

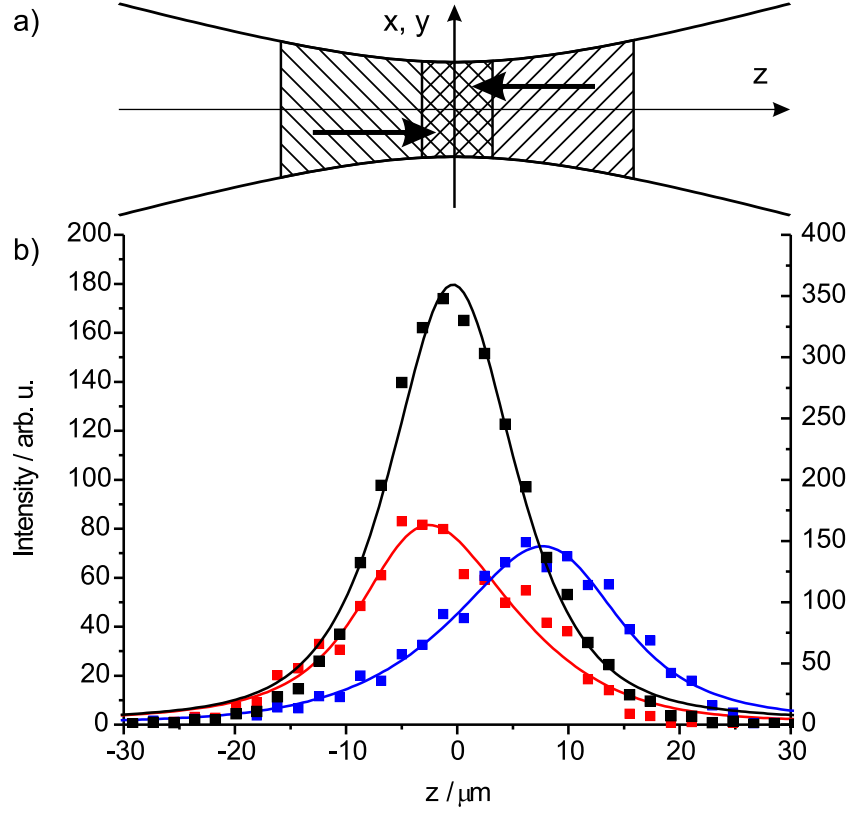


Abbildung 4.21: a) 2ω -Signal zweier gegenläufiger Laserpulse mit überlappenden Foki. b) 2ω -Signal, gemessen für zwei Pulse, deren Foki bei $z = 0$ überlappen. Die schwarzen Meßpunkte gehören zu einer verschwindenden zeitlichen Verzögerung zwischen den beiden Pulsen ($\Delta\tau = 0$). Die blauen bzw. roten Meßpunkte gehören zu einer zeitlichen Verzögerung $\Delta\tau = +66$ fs bzw. $\Delta\tau = -66$ fs. Die durchgezogenen Linien sind berechnet (Nichtlineare Kurvenpassung gemäß Gl. 4.30). Der besseren Übersicht wegen sind die experimentellen Werte für nichtverschwindende zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau \neq 0$, rot und blau) um einen Faktor 2 (linke Skala) gestreckt - bzgl. der experimentellen Werte (rechte Skala) für verschwindende zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau = 0$, schwarz).

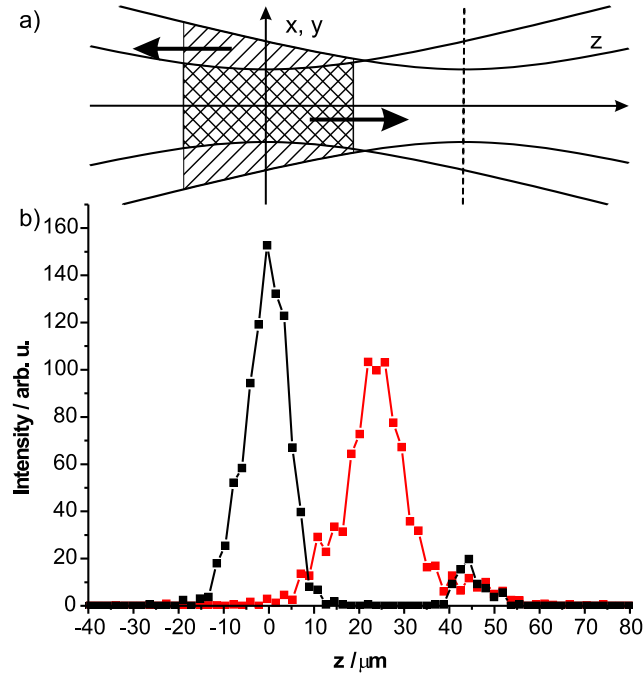


Abbildung 4.22: a) 2ω -Signal für zwei gegenläufige Laserpulse mit nichtüberlappenden Foki. b) 2ω -Signal, gemessen für zwei Pulse, deren Foki $z_1 = 45 \mu\text{m}$ auseinander liegen; die Pulse überschneiden sich (in der Zeit!) im linken Fokus (schwarze Kurve). Die rote Kurve gehört zu $z_1 = 22 \mu\text{m}$, und das 2ω -Signal ist symmetrisch.

5 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde ein Experiment zur Überlagerung zweier gegenläufiger intensiver Laserpulse aufgebaut. Der Aufbau und die Diagnostik ermöglichen es, gegenläufigen Laserpulse mit hoher Genauigkeit in Raum *und* Zeit zu überlagern. Zur Beobachtung des räumlichen und zeitlichen Überlapps wurden zeitintegrierte Bilder der 2ω -Selbstemission (2ω -Signal) sowie zeitaufgelöste 2ω -Schattenbilder des Plasmas aufgenommen. Das zeitintegrierte, in Richtung der (gemeinsamen) optischen Achse der gegenläufigen Laserpulse räumlich aufgelöste 2ω -Signal ($S_{2\omega}$) diente als relativistisches Autokorrelationssignal zweiter Ordnung, d. h. $S_{2\omega}(I^2)$. Während Autokorrelationsmessung herrschte an der Stelle des gemeinsamen Fokus eine geringe (Plasma-)Elektronendichte von $2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, so daß Propagationseffekte, welche i. a. während der Ausbreitung eines Laserpulses durch ein Plasma auftreten, zu vernachlässigen waren. Die erreichte räumliche Genauigkeit des Überlapps war durch die räumliche Auflösung der relativistischen, nicht interferometrischen Autokorrelationsmessung von $\Delta x_{\text{auto}} = 5 \mu\text{m}$ gegeben; wegen $\Delta t = \Delta x_{\text{auto}}/c$ entspricht dies einer zeitlichen Genauigkeit von etwa 17 fs. Aus der relativistischen Autokorrelationsmessung wurden die Pulsdauer und die Rayleighlänge ermittelt:

$$\tau_{\text{FWHM}} = (112 \pm 11) \text{ fs}, \quad z_0 = (9 \pm 1) \mu\text{m}.$$

6 Ausblick

Wie schon in der Einleitung erwähnt, soll der Aufbau für zukünftige Experimente genutzt werden:

- Experimente zur Compton-Rückstreuung an laserbeschleunigten relativistischen Elektronenstrahlen (s. Abb. 6.1): Bei der gewöhnlichen Compton-Streuung trifft ein Photon auf ein freies Elektron und wird gestreut. Während des Stoßes gibt es einen Teil seiner Energie an das Elektron ab - das gestreute Photon wird abgelenkt und fliegt mit geringerer Energie weiter. Bei der Wechselwirkung eines Laserpulses mit einem lasererzeugten Plasma können Elektronen auf relativistische Energien ($E_{\text{kin}} > 512 \text{ keV}$) beschleunigt werden. Die Folge ist ein Bündel aus vielen schnellen Elektronen, welche sich stark gerichtet in Ausbreitungsrichtung des Laserpulses fortbewegen. Die Photonen des gegenläufigen Pulses stoßen mit dem Elektronenbündel zusammen und werden rückgestreut. Bei der Compton-Rückstreuung *gewinnt* das Photon Energie. Für einen Streuwinkel von $\theta = 180^\circ$ ist die Energie der rückgestreuten Elektronen gegeben durch

$$\hbar\omega'_0 = 4\gamma^2\hbar\omega_0, \quad (6.1)$$

wobei \hbar die reduzierte Planck'sche Konstante, ω_0 die ursprüngliche Frequenz der Laserphotonen, γ der Lorentzfaktor der relativistischen Elektronen und ω'_0 die Frequenz der rückgestreuten Photonen sind. Bei einer ursprünglichen Laserwellenlänge von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ ($\omega_0 = 2.4 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$) und einem Lorentzfaktor von $\gamma = 20$ ergibt sich eine Energie der rückgestreuten Photonen von 2.5 keV . Die rückgestreuten Photonen stellen sollten eine Quelle hochenergetischer Photonen im Röntgenbereich darstellen. Aus dem Photonenspektrum läßt sich unmittelbar auf das Energiespektrum und die Geschwindigkeitsverteilung der relativistischen Elektronen zurückrechnen. Überlicherweise wird das Spektrum der lasererzeugten Elektronen mit Elektronenspektrometern, Bremsstrahlung oder der Aktivierung nuklearer Reaktionen weit außerhalb des Gebietes der Laser-Plasma-Wechselwirkung gemessen (ersteres im Zentimeter-, letzteres im Mikrometerbereich). Da die laserbeschleu-

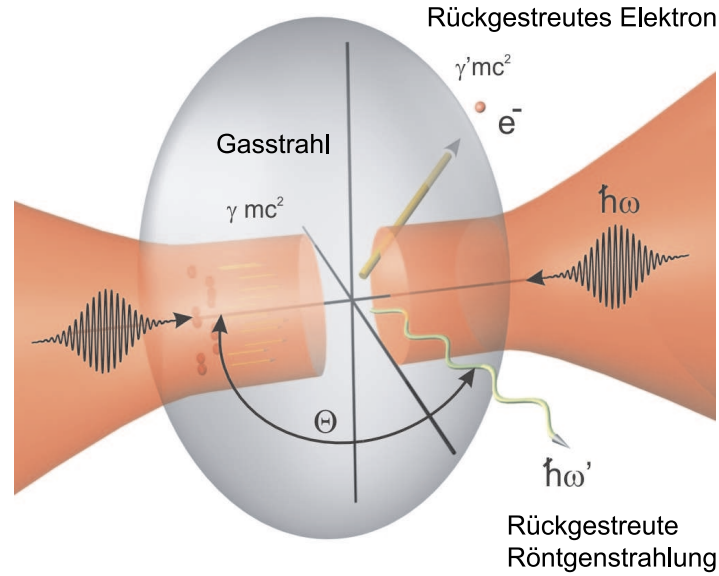


Abbildung 6.1: Compton-Rückstreuung an laserbeschleunigten relativistischen Elektronen. Einer der beiden gegenläufigen Laserpulse beschleunigt Elektronen auf relativistische Energien, welche im wesentlichen in Ausbreitungsrichtung des Laserpulses fliegen. Die Laserphotonen des gegenläufigen Laserpulses werden an den relativistischen Elektronen rückgestreut und nehmen Energie auf. Bei geradem Zusammenstoß der Photonen und der Elektronen (Streuwinkel $\theta = 180^\circ$) ist die Energie der gestreuten Photonen durch $\hbar\omega'_0 = 4\gamma^2\hbar\omega_0$ gegeben. D. h. Bei einer Laserwellenlänge von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ und einem Lorentzfaktor von $\gamma = 20$ beträgt die Energie der rückgestreuten Photonen 2.5 keV ; diese liegt im Röntgenbereich. Aus dem Spektrum der rückgestreuten Photonen läßt sich das Energie- bzw. Geschwindigkeitsspektrum der Elektronen in der Gegend der Laser-Plasma-Wechselwirkung berechnen.

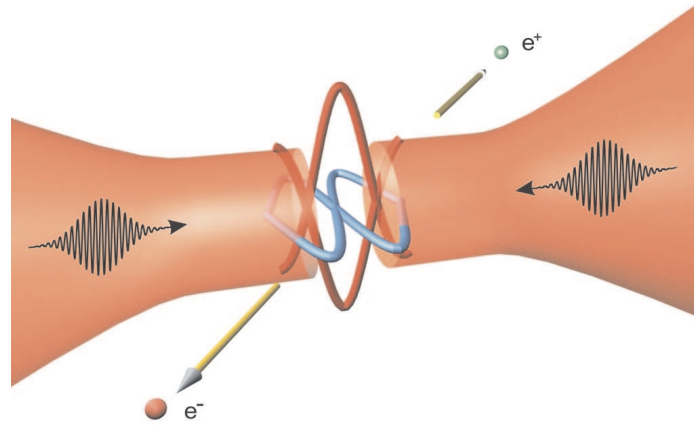


Abbildung 6.2: Lasererzeugte Paarbildung aus einem idealen Vakuum?

nigten Elektronen bei der Messung weit von den zurückbleibenden schwereren und dadurch trägen Ionen entfernt sind, baut sich ein hohes elektrostatisches Potential auf, welches das Spektrum der Elektronen möglicherweise verfälscht. Das Spektrum der rückgestreuten Compton-Photonen hingegen liefert unmittelbar das Elektronenspektrum in der Nähe der Wechselwirkungsregion.

- Experiment zur Elektron-Elektron-Kollision: Liegen die Foki der beiden Laserpulse in z -Richtung etwas auseinander, so bilden sich zwei relativistische Kanäle aus, in welchen die Elektronen gegeneinander beschleunigt werden. Die entstehenden Elektronenbündel stoßen aufeinander, und es sollten Elektron-Positron-Paare entstehen

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^- + e^+, \quad (6.2)$$

wobei e^- das Elektron und e^+ das Positron sind. Dieses Experiment könnte Aufschluß über die Elektronenströme in einem lasererzeugten Plasmen geben. Die Ausbeute wäre mit denen herkömmlicher Teilchenbeschleuniger zu vergleichen.

- Experiment zur lasererzeugten Paarbildung (s. Abb. 6.2): Ein fernes Ziel ist die Detektion von Elektron-Positron-Paaren im intensiven elektromagnetischen Feld zweier gegenläufiger Laserpulse im Vakuum, d. h. unter Abwesenheit irgendwelcher Teilchen. Der Zusammenbruch des Vakuums soll stattfinden, wenn das Elektron-Positron-Paar durch ein kritisches Feld (E_{krit}) über eine charakteristische Länge

6 Ausblick

$(\lambda_{\text{ch}}/2\pi)$ seine Ruheenergie $(m_e c^2)$ aufnimmt

$$eE_{\text{krit}} \frac{\lambda_{\text{ch}}}{2\pi} = m_e c^2. \quad (6.3)$$

In einer laufenden Laserwelle ist die charakteristische Wellenlänge durch die Comptonwellenlänge des Elektrons ($\lambda_c = \hbar/m_e c \approx 2.42 \times 10^{-12} \text{ m}$) gegeben, so daß sich für das kritische Feld $E_{\text{krit}} = 1.3 \times 10^{17} \text{ V/m}$ ergibt. Dies entspricht einer Laserintensität von $6 \times 10^{27} \text{ W/cm}^2$, die zur Zeit utopisch ist. Weiterhin werden für die Paarbildung aus einem idealen Vakuum äußerste Bedingungen an die Vakuumtechnik erforderlich sein (vermutlich $p_{\text{vak}} \lesssim 10^{-9} \text{ mbar}$). Theoretische Veröffentlichungen auf dem Gebiet der nichtlinearen Quantenelektrodynamik (N-QED) kommen zu dem Ergebnis, daß für zusammenstoßende Laserpulse, d. h. in einer stehenden Welle, Intensitäten von 10^{18} W/cm^2 [39] oder $10^{26} \dots 10^{27} \text{ W/cm}^2$ [40] benötigt werden, um aus dem idealen Vakuum eine meßbare Anzahl von Elektron-Positron-Paaren zu erzeugen. Die Abweichung der theoretischen Vorhersagen für die Laserintensität um 8 bis 9 Größenordnungen zeigt, daß eine experimentelle Überprüfung für Fragen auf dem Gebiet der N-QED interessant wäre.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Zweistrahlexperiment	7
2.1	Geschwindigkeit eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, Laborsystem)	14
2.2	Relativistische Bahnkurve eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, Laborsystem)	15
2.3	Relativistische Bahnkurve eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, lorentztransformiertes System, in dem der mittlere Impuls in Ausbreitungsrichtung des Lasers verschwindet)	17
2.4	Geschwindigkeit eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (stehende Welle, Laborsystem)	20
2.5	Bahnkurve und Lorentzfaktor eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (stehende Welle, Laborsystem)	21
2.6	Longitudinales und transversales Intensitätsprofil eines einzelnen Laserpulses	26
2.7	Stehendes Laserfeld	27
2.8	Intensität eines stehenden Laserfeldes	29
2.9	Exakter Lorentzfaktor und Lorentzfaktor in Störungstheorie	34
2.10	Exakte Beschleunigung und Beschleunigung in erster Ordnung Störungstheorie im Vergleich	35
2.11	Klassische Dispersionsrelation des Plasmas	42
2.12	Ponderomotorische Kraft und ponderomotorisches Potential	45
2.13	Quasi-statisches elektrisches Feld im ponderomotorischen Potential	47
2.14	Elektronendichteverteilung bei der ponderomotorischen Selbstfokussierung	49
2.15	Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ niedrigerer Laserintensität	54
2.16	Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ hoher Laserintensität	55
3.1	Jenaer Lasersystem	58

Abbildungsverzeichnis

3.2	Eingebauter Faraday-Isolator	62
3.3	Zurücklaufender Laserpuls	64
3.4	Experimenteller Aufbau	66
3.5	Strahlteiler, Parabolspiegel und Gasdüse	67
3.6	Fokussier- und Überlappdiagnostik	69
3.7	Fokussier- und Überlappobjektive	70
4.1	Fokussierung der beiden Foki.	74
4.2	Intensitäten der Foki	76
4.3	Klassische Autokorrelation dritter Ordnung	80
4.4	Hohe Gasdichten	84
4.5	Niedrige Gasdichte	85
4.6	Fokussierung eines Laserpulses in einen Helium-Gasstrahl	87
4.7	Überlappbild	89
4.8	2ω -Selbstemission eines Laserpulses	91
4.9	Schattenbilder des Überlapps	95
4.10	2ω -Schattenbild und 2ω -Selbstemission des Überlapps	96
4.11	Durchdringung zweier gegenläufiger Laserpulse $1/2$	98
4.12	Durchdringung zweier gegenläufiger Laserpulse $2/2$	99
4.13	Schattenbilder der Strahlteilerverschiebung	100
4.14	2ω -Selbstemission und Selbstfokussierung zweier gegenläufiger Laserpulse	101
4.15	2ω -Signal bei niedriger Elektronendichte	102
4.16	Überlapp der beiden gegenläufigen Laserpulse	104
4.17	Überlapp der Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse	106
4.18	Mehrschuß-Autokorrelationssignal bei relativistischer Intensität	107
4.19	Relativistische Autokorrelation	109
4.20	Meßprinzip der relativistischen Autokorrelation	110
4.21	2ω -Signal zweier gegenläufiger Laserpulse mit überlappenden Foki	113
4.22	2ω -Signal für zwei gegenläufige Laserpulse mit nichtüberlappenden Foki	114
6.1	Lasererzeugte Compton-Rückstreuung	117
6.2	Lasererzeugte Paarbildung aus einem idealen Vakuum?	118
7.1	Anhang: Transversale und longitudinale Geschwindigkeiten eines Elektrons in einer ebenen Welle im Laborsystem	136
7.2	Anhang: Relativistische Bahnkurve eines Elektrons im Laborsystem.	138
7.3	Anhang: Relativistische Bewegung eines Elektrons im mittleren Ruhesystem	140

Abbildungsverzeichnis

7.4	Anhang: Stehendes elektrisches und magnetisches Feld als Überlagerung ebener Wellen	141
7.5	Anhang: Transversale Geschwindigkeit eines relativistischen Elektrons in einer stehenden Welle	144
7.6	Anhang: Longitudinale Geschwindigkeit eines relativistischen Elektrons in einer stehenden Welle	144
7.7	Anhang: Bahnkurve eines relativistischen Elektrons in einer stehenden Welle	145
7.8	Anhang: Ponderomotorische Kraft und ponderomotorisches Potential . . .	151
7.9	Anhang: Normierte Elektronendichte und statisches elektrisches Feld . . .	154
7.10	Anhang: Intensität eines einzelnen Gauß'schen Strahles	157
7.11	Anhang: Schnitt durch Abbildung 7.10	157
7.12	Anhang: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen	159
7.13	Anhang: Stehendes elektrisches und magnetisches Feld als Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen auf der optischen Achse	162
7.14	Anhang: Elektrisches Feld und Magnetfeld zweier gegenläufiger Gaußstrahlen in der Nähe des Fokus	165
7.15	Anhang: Intensität eines nach rechts und eines nach links laufenden Gauß'schen Pulses ohne Chirp	169
7.16	Anhang: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse ohne Chirp . . .	170
7.17	Anhang: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse mit Chirp . . .	171
7.18	Anhang: Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ niedriger Intensität . . .	192
7.19	Anhang: Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ hoher Intensität	193

Literaturverzeichnis

- [1] STRICKLAND, D. & MOUROU, G.: *Compression of amplified chirped optical pulses*. Optics Communications, 56(3):219–221, 1985.
- [2] GAHN, C.: *Erzeugung relativistischer Elektronen durch Propagation hochintensiver Laserpulse in einem Plasma*. Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2000.
- [3] EWALD, F.; SCHWOERER, H.; DUESTERER S.; SAUERBREY R.; MAGILL J.; GALY J.; SCHENKEL R.; KARSCH S.; HABS D. & WITTE K.: *Application of relativistic laser plasmas for the study of nuclear reactions*. Plasma Physics and Controlled Fusion, 45:A83–A91, 2003.
- [4] LEDINGHAM, K. W. D.; SPENCER, I.; MCCANNY T.; SINGHAL R. P.; SANTALA M. I. K.; CLARK E.; WATTS I.; BEG F. N.; ZEPF M.; KRUSHELNICK K.; TATARAKIS M.; DANGOR A. E.; NORREYS P. A.; ALLOTT R.; NEELY D.; CLARK R. J.; MACHACEK A. C.; WARK J. S.; CRESSWELL A. J.; SANDERSON D. C. W. & MAGILL J.: *Photonuclear physics when a multiterawatt laser pulse interacts with solid targets*. Physical Review Letters, 84(5):899–902, 2000.
- [5] LIESFELD, B.; AMTHOR, K.-U.; EWALD F.; SCHWOERER H.; MAGILL J.; GALY J.; LANDER G. & SAUERBREY R.: *Nuclear reactions triggered by laser-accelerated relativistic electron jets*. Applied Physics B, 2004.
- [6] MAGILL, J.; SCHWOERER, H.; EWALD F.; GALY J.; SCHENKEL R. & SAUERBREY R.: *Laser transmutation of iodine-129*. Applied Physics B - Lasers and Optics, 77(4):387–390, 2003.
- [7] FAURE, J.; GLINEC, Y.; PUKHOV A.; KISELEV S.; GORDIENKO S.; LEFEBVRE E.; ROUSSEAU J. P.; BURG Y. & MALK A.: *A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams*. Nature, 431(7008):541–544, 2004.

- [8] GEDDES, C. G. R.; TOTH, C.; TILBORG J. VAN; ESAREY E.; SCHROEDER C. B.; BRUHWILDER D.; NIETER C.; CARY J. & LEEMANS W. P.: *High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding*. Nature, 431(7008):538–541, 2004.
- [9] MANGLES, S. P. D.; MURPHY, C. D.; NAJMUDIN Z.; THOMAS A. G. R.; COLLIER J. L.; DANGOR A. E.; DIVALL E. J.; FOSTER P. S.; GALLACHER J. G.; HOOKER C. J.; JAROSZYNSKI D. A.; LANGLEY A. J.; MORI W. B.; NORREYS P. A.; TSUNG F. S.; VISKUP R.; WALTON B. R. & KRUSHELNICK K.: *Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser-plasma interactions*. Nature, 431(7008):535–538, 2004.
- [10] KALUZA, M., J. SCHREIBER, M. I. K. SANTALA, G. D. TSAKIRIS, K. EIDMANN, MEYER TER VEHN und K. J. WITTE: *Influence of the laser prepulse on proton acceleration in thin-foil experiments*. Physical Review Letters, 93(4), 2004.
- [11] ROTH, M.; BLAZEVIC, A.; GEISSEL M.; SCHLEGEL T.; COWAN T. E.; ALLEN M.; GAUTHIER J. C.; AUDEBERT P.; FUCHS J.; MEYER-TER-VEHN J.; HEGELICH M.; KARSCH S. & PUKHOV A.: *Energetic ions generated by laser pulses: A detailed study on target properties*. Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams, 5(6):061301, 2002.
- [12] SCHWOERER, H.; GIBBON, P.; DUSTERER S.; BEHRENS R.; ZIENER C.; REICH C. & SAUERBREY R.: *MeV X rays and photoneutrons from femtosecond laser-produced plasmas*. Physical Review Letters, 86(11):2317–2320, 2001.
- [13] COWAN, T. E.; HUNT, A. W.; PHILLIPS T. W.; WILKS S. C.; PERRY M. D.; BROWN C.; FOUNTAIN W.; HATCHETT S.; JOHNSON-J.; KEY M. H.; PARNELL T.; PENNINGTON D. M.; SNAVELY R. A. & TAKAHASHI Y.: *Photonuclear fission from high energy electrons from ultraintense laser-solid interactions*. Physical Review Letters, 84(5):903–906, 2000.
- [14] CHEN, S. Y.; MAKSIMCHUK, A. & UMSTADTER D.: *Experimental observation of relativistic nonlinear Thomson scattering*. Nature, 396(6712):653–655, 1998.
- [15] LAU, Y. Y.; HE, F.; UMSTADTER D. P. & KOWALCZYK R.: *Nonlinear Thomson scattering: A tutorial*. Physics of Plasmas, 10(5):2155–2162, 2003.
- [16] FEURER, T. & SAUERBREY, R.: *Characterization of short laser pulses*, Band 29C der Reihe *Experimental methods in the physical sciences. Atomic, Molecular, and Optical Physics: Electromagnetic Radiation*. Academic Press, San Diego, 1997.

- [17] LIESFELD, B.; BERNHARDT, J.; AMTHOR K. U.; SCHWOERER H. & SAUERBREY R.: *Single-Shot Autocorrelation at Relativistic Intensities*. Submitted to Appl. Phys. Lett.
- [18] JACKSON, J. D.: *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 3rd Auflage, 1998.
- [19] NOLTING, W.: *Grundkurs: Theoretische Physik 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*. Zimmermann-Neufang, Ulmen, 2nd Auflage, 1993.
- [20] SARACHIK, E. S. & SCHAPPERT, G. T.: *Classical Theory Of Scattering Of Intense Laser Radiation By Free Electrons*. Physical Review D, 1(10):2738–2753, 1970.
- [21] DEMTRÖDER: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer, Berlin, 2. Auflage, 1999.
- [22] MILONI, P. W. & EBERLY, J. H.: *Lasers*. Wiley & Sons, New York, 1988.
- [23] VEHN, J. & PUKHOV, A. MEYER-TER: *Relativistic laser plasma interaction: I. Analytical tools*. Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching.
- [24] DIELS, J. & RUDOLPH, W.: *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*. Academic Press, San Diego, 1996.
- [25] LEDERER, F.: *Vorlesung über Theoretische Optik*. Friedrich Schiller Universität Jena.
- [26] SAUERBREY, R.: *Vorlesung über Physik bei hohen Laserintensitäten*. Friedrich Schiller Universität Jena.
- [27] SAUERBREY, R.: *Vorlesung über Nichtlineare Optik*. Friedrich Schiller Universität Jena.
- [28] MODENA, A.; NAJMUDIN, Z.; DANGOR A. E.; CLAYTON C. E.; MARSH K. A.; JOSHI C.; MALK A. V.; DARROW C. B.; DANSON C.; NEELY D. & WALSH F. N.: *Electron acceleration from the breaking of relativistic plasma-waves*. Nature, 377(6550):606–608, 1995.
- [29] HUTCHINSON, I. H.: *Principles of plasma diagnostics*. Cambridge University Press, 1987.

- [30] AMTHOR, K.-U.: *Plasmadiagnose in Experimenten zur Wechselwirkung intensiver Laserimpulse mit Materie*. Diplomarbeit, Institut für Optik und Quantenelektronik Jena, 2002.
- [31] HIPPEL, M. & REITERER, P.: *User manual for IDEA. Software for interferometrical data evaluation*. <http://optics.tu-graz.ac.at>. Institut für Experimentalphysik, Technische Universität Graz, 1999.
- [32] TAJIMA, T. & DAWSON, J. M.: *Laser Electron-Accelerator*. Physical Review Letters, 43(4):267–270, 1979.
- [33] ESAREY, E.; SPRANGLE, P. ; KRALL J. & TING A.: *Overview of plasma-based accelerator concepts*. IEEE Transactions On Plasma Science, 24(2):252–288, 1996.
- [34] GAHN, C.; TSAKIRIS, G. D.; PUKHOV A.; MEYER-TER-VEHN J.; PRETZLER G.; THIROLF P.; HABS D. & WITTE K. J.: *Multi-MeV electron beam generation by direct laser acceleration in high-density plasma channels*. Physical Review Letters, 83(23):4772–4775, 1999.
- [35] PUKHOV, A.; SHENG, Z. M. & MEYER-TER-VEHN-J.: *Particle acceleration in relativistic laser channels*. Physics of Plasmas, 6(7):2847–2854, 1999.
- [36] SCHREIBER, J.: *Erzeugung und Charakterisierung von frequenzverdoppelten ultrakurzen Terawatt Titan-Saphir-Laserimpulsen*. Diplomarbeit, Institut für Optik und Quantenelektronik Jena, 2002.
- [37] EWALD, F.: *Harte Röntgenstrahlung aus relativistischen Laserplasmen und laserinduzierte Kernreaktionen*. Doktorarbeit, Institut für Optik und Quantenelektronik Jena, 2004.
- [38] PRETZLER, G.; KASPER, A. & WITTE K. J.: *Angular chirp and tilted light pulses in CPA lasers*. Applied Physics B - Lasers and Optics, 70(1):1–9, 2000.
- [39] AVETISSIAN, H. K.; AVETISSIAN, A. K.; MKRTCHIAN G. F. & SEDRAKIAN K. V.: *Electron-positron pair production in the field of superstrong oppositely directed laser beams*. Physical Review E, 66(1), 2002.
- [40] NAROZHNY, N. B.; BULANOV S. S.; MUR, V. D. & POPOV V. S.: *$e^{(+)}e^{(-)}$ -pair production by a focused laser pulse in vacuum*. Physics Letters A, 330(1-2):1–6, 2004.

- [41] SCHWOERER, H.: *Vorlesung über Materie in intensiven Lichtfeldern. Eine Einführung in relativistische Plasmaphysik, Hochintensitätslasertechnologie und deren gemeinsame Anwendungen.* Friedrich Schiller Universität Jena, 2002.
- [42] DAVID, N.: *Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in relativistischen Plasmen.* Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2002.
- [43] KRUEER, W. L.: *The physics of laser plasma interactions.* Addison Wesley, Redwood City, 1987.
- [44] SAUERBREY, R. & TÜNNERMANN, A.: *Vorlesung über Grundlagen der Laserphysik.* Friedrich Schiller Universität Jena.
- [45] FEJER, M. M. & CHARBONNEAU-LEFORT, M.: *Online lecture notes: EE232 Laser Dynamics.* <http://www.stanford.edu/class/ee232/LectureNotes/>. 279 Ginzton Laboratory 650 725 2160.
- [46] AKHMANOV, S. A. & NIKITIN, S. YU.: *Physical Optics.* Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [47] SALEH, E. A., & TEICH M. C.: *Fundamentals of photonics.* Wiley, New York, 1991.
- [48] SAUERBREY, R.: *Autokorrelation bei relativistischen Intensitäten.* August 2004.
- [49] ESAREY E.; SPRANGLE, P.; KRALL, J. & TING A.: *Self-focusing and guiding of short laser pulses in ionizing gases and plasmas.* IEEE Journal Of Quantum Electronics, 33(11):1879–1914, 1997.
- [50] GOOR, F. A. VAN: *Laser wakefield acceleration of electrons (cgs units).* University of Twente, P. O. Box 217 7500 AE Enschede, The Netherlands. f.a.vanGoor@tn.utwente.nl, 2003.
- [51] SPRANGLE, P., E. ESAREY und A. TING: *Nonlinear theory of intense laser-plasma interactions.* Physical Review Letters, 64(17):2011–2014, 1990.
- [52] DE ANGELIS, U.: *Excitation of a large-amplitude plasma-wave by a short laser-pulse.* Physica Scripta, T30:210–214, 1990.

Danksagung

Abschließend möchte ich mich herzlich bei allen bedanken, die mich während der Durchführung meiner Diplomarbeit am Institut für Optik und Quantenelektronik in Jena unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt: Prof. Roland Sauerbrey für die Vergabe des Themas, Dr. Heinrich Schwoerer, Ben Liesfeld, Kay-Uwe Amthor und Dr. Friederike Ewald für die Betreuung, Falk Ronneberger, Wolfgang Ziegler und Burgard Beleites für die technische Unterstützung und Kathrin Koch, Sabine Volkmer, Dr. Alexander Nazarkin, Dr. Ralf Netz, Frithjof Brauer, Gabor Matthäus, Oliver Jäckel, Sebastian Pfothenhauer, Dr. Gregor Strobrawa, Dr. Martin Hacker und Guy Buss für die physikalischen Gespräche.

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Diplomarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, den 07. 02. 2005

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Das Zusatzkapitel 7 behandelt die mathematischen Herleitungen zu den theoretischen Grundlagen, wobei die einzelnen Zwischenschritte der Rechnungen angegeben sind.

7.1 Freies Elektron in einer ebenen Welle

7.1.1 Klassische Betrachtung

Für das elektrische Feld einer in x-Richtung linear polarisierten ebenen elektromagnetischen Welle mit Propagationsrichtung z gilt

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

mit der Abkürzung

$$\phi \equiv (\omega_0 t - k_0 z) \quad (7.2)$$

Bildet man die Rotation des elektrischen Feldes

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} E_0 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

und setzt dies in die Maxwellgleichung

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \quad (7.4)$$

ein, so ergibt sich

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = k_0 E_0 \sin \phi \quad (7.5)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Zeitliche Integration mit der Anfangsbedingung

$$B_y(\phi = 0) \doteq \frac{k_0 E_0}{\omega_0} \quad (7.6)$$

liefert die y-Komponente des Magnetfeldes

$$B_y = \frac{k_0 E_0}{\omega_0} \cos \phi \quad (7.7)$$

Nach Einsetzen der Dispersionsrelation

$$\omega_0 = ck_0 \quad (7.8)$$

erhält man schließlich das Magnetfeld

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

mit der Amplitude

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \quad (7.10)$$

Auf das Elektron wirkt i. a. die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.11)$$

Da aber für kleine Geschwindigkeiten

$$v \ll c \Leftrightarrow v/c \ll 1 \quad (7.12)$$

der Einfluß des Magnetfeldes wegen (7.10) vernachlässigt werden kann

$$\mathbf{F} \approx -e\mathbf{E} \quad (7.13)$$

folgt

$$\frac{dp_x}{dt} = -eE_0 \cos \phi \quad (7.14)$$

Integration liefert

$$p_x = -\frac{eE_0}{\omega_0} \sin \phi \quad (7.15)$$

Daraus ergibt sich für die über eine Periode zeitlich gemittelte klassische Oszillationsenergie¹²

$$\langle U_{osz} \rangle = \left\langle \frac{p_x^2}{2m} \right\rangle = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega_0^2} \quad (7.16)$$

Mit der über eine Periode zeitlich gemittelten Intensität

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \quad (7.17)$$

läßt sich (7.16) schreiben als

$$\langle U_{osz} \rangle = \frac{e^2}{8m\varepsilon_0\pi^2 c^3} \langle I \rangle \lambda_0^2 \quad (7.18)$$

Setzt man für Intensität und Wellenlänge des Feldes die Werte $I = 10^{19} \text{ W/cm}^2$ und $\lambda = 800 \text{ nm}$ ein, so erhält man

$$\langle U_{osz} \rangle \approx 600 \text{ keV} > 511 \text{ keV}$$

D. h. : ab Intensitäten in der Größenordnung von $I \simeq 10^{19} \text{ W/cm}^2$ ist die mittlere Oszillationsenergie größer als die Ruheenergie des Elektrons und daher eine relativistische Betrachtung erforderlich. Ein Vergleich mit der atomaren Intensität

$$I_{at} \approx 4 \times 10^{16} \text{ W/cm}^2 \quad (7.19)$$

verdeutlicht die riesigen Intensitäten in der relativistische Optik.

7.1.2 Relativistische Betrachtung

Laborsystem

Die relativistischen Bewegungsgleichungen lauten³

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.20)$$

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (7.21)$$

¹ $\langle f(\phi) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi') d\phi'$

² $\langle \sin^2 \phi \rangle = \langle \cos^2 \phi \rangle = 1/2$

³ s. Anh. (7.14)

mit dem relativistischen Impuls

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad (7.22)$$

und dem Lorentzfaktor

$$\gamma = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathbf{p}}{mc}\right)^2} \quad (7.23)$$

Setzt man das Kreuzprodukt

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -v_z B_y \\ 0 \\ v_x B_y \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

in (7.20) ein, so findet man

$$\frac{dp_x}{dt} = -eE_0 \cos \phi + v_z B_y = eE_0 \cos \phi \left(\frac{v_z}{c} - 1\right) \quad (7.25)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0 \quad (7.26)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -ev_x B_y = -\frac{e}{c} v_x E_0 \cos \phi \quad (7.27)$$

Setzt man das Skalarprodukt

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = v_x E_x \quad (7.28)$$

und den relativistischen Parameter

$$a_0 \equiv \left| \frac{\max(p_{klass})}{mc} \right| = \frac{eE_0}{m\omega_0 c} \quad (7.29)$$

als das Verhältnis von klassischem Impuls zu $p_0 = mc$ ein, so ergibt sich

$$\frac{dp_x}{dt} = a_0 m \omega_0 c \cos \phi \left(\frac{v_z}{c} - 1\right) \quad (7.30)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0 \quad (7.31)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -a_0 m \omega_0 v_x \cos \phi \quad (7.32)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

$$\frac{d\gamma}{dt} = -a_0 \frac{\omega_0}{c} v_x \cos \phi \quad (7.33)$$

Führt man den normierten Impuls

$$\tilde{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathbf{p}}{mc} \quad (7.34)$$

ein, erhält man schließlich das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = a_0 \omega_0 \cos \phi \left(\frac{v_z}{c} - 1 \right) \quad (7.35)$$

$$\frac{d\tilde{p}_y}{dt} = 0 \quad (7.36)$$

$$\frac{d\tilde{p}_z}{dt} = -a_0 \frac{\omega_0}{c} v_x \cos \phi \quad (7.37)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -a_0 \frac{\omega_0}{c} v_x \cos \phi \quad (7.38)$$

Nach Subtraktion von (7.37) und (7.38)

$$\frac{d}{dt} (\gamma - \tilde{p}_z) = 0 \quad (7.39)$$

und anschließender Integration ergibt sich

$$\gamma - \tilde{p}_z = \text{const} \equiv \eta \quad (7.40)$$

Wählt man die Anfangsbedingungen so, daß das Elektron bei maximaler Feldstärke ruht

$$\tilde{\mathbf{p}}(\phi = 0) \doteq 0 \quad (7.41)$$

so ergibt sich nach Integration von (7.36)

$$\tilde{p}_y \equiv 0 \quad (7.42)$$

Die Anfangsbedingung für den Lorentzfaktor lautet

$$\gamma(\phi = 0) = 1 \quad (7.43)$$

Weiterhin gilt

$$\gamma(\phi = 0) - \tilde{p}_z(\phi = 0) = 1 \quad (7.44)$$

und aus (7.40) ergibt sich

$$\eta \equiv 1 \quad (7.45)$$

Aus (7.40) und (7.45) folgt weiterhin

$$\gamma = 1 + \tilde{p}_z \quad (7.46)$$

Quadrieren von (7.40)

$$\gamma^2 = \eta^2 + \tilde{p}_z^2 + 2\eta\tilde{p}_z \quad (7.47)$$

sowie Einsetzen von (7.45) ergibt

$$\gamma^2 = 1 + \tilde{p}_z^2 + 2\tilde{p}_z \quad (7.48)$$

Setzt man dies mit dem quadrierten Lorentzfaktor

$$\gamma^2 = 1 + \tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_z^2 \quad (7.49)$$

aus (7.23) gleich, erhält man schließlich

$$\tilde{p}_z = \frac{\tilde{p}_x^2}{2} \quad (7.50)$$

d. h. : der Impuls in Propagationsrichtung hängt quadratisch vom Impuls in Polarisationsrichtung ab. Um p_x zu berechnen, geht man von

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = \frac{d\tilde{p}_x}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \quad (7.51)$$

und (7.2) aus, es ergibt sich

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 - k_0 \frac{dz}{dt} = \omega_0 - k_0 v_z \quad (7.52)$$

Mit Hilfe der Dispersionsrelation (7.8) folgt

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 \left(1 - \frac{v_z}{c}\right) \quad (7.53)$$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{p}_x}{d\phi} = -a_0 \cos \phi \quad (7.54)$$

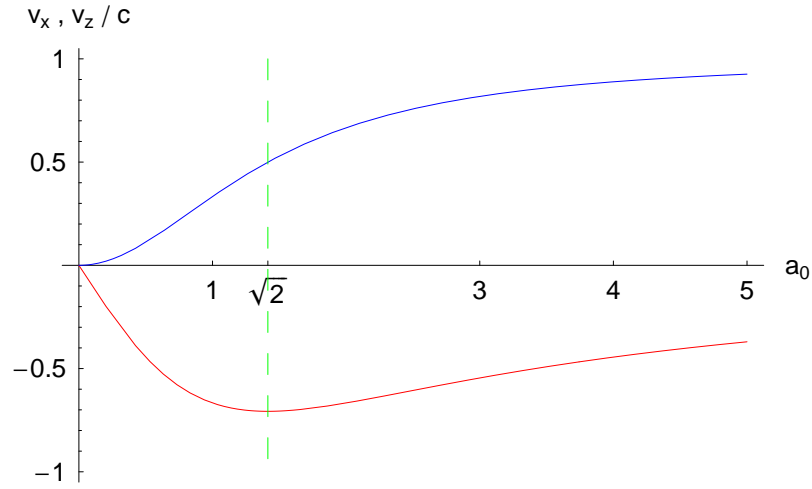


Abbildung 7.1: Geschwindigkeiten in Polarisationsrichtung (rot) und in Ausbreitungsrichtung (blau), $a_0 = \sqrt{2}$ (grün) in Abhängigkeit des relativistischen Parameters für $\phi = \frac{\pi}{2}$

Integration dieser Gleichung liefert

$$\tilde{p}_x(\phi) = -a_0 \sin \phi + \text{const} \quad (7.55)$$

und mit der Anfangsbedingung, daß das Elektron bei maximaler Feldstärke ruht

$$\tilde{p}_x(\phi = 0) \doteq 0 \quad (7.56)$$

ergibt sich

$$\tilde{p}_x = -a_0 \sin \phi \quad (7.57)$$

$$\tilde{p}_z = \frac{1}{2} a_0^2 \sin^2 \phi \quad (7.58)$$

und schließlich

$$p_x = -a_0 m c \sin \phi \quad (7.59)$$

$$p_z = \frac{1}{2} a_0^2 m c \sin^2 \phi \quad (7.60)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Über (7.59) und (7.60) erhält man für die Geschwindigkeiten

$$v_x = -\frac{2a_0 c \sin \phi}{2 + a_0^2 \sin^2 \phi} \quad (7.61)$$

$$v_z = \frac{a_0^2 c \sin^2 \phi}{2 + a_0^2 \sin^2 \phi} \quad (7.62)$$

Für hohe Intensitäten lauten die Grenzwerte für die Geschwindigkeiten

$$\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_x = 0 \quad (7.63)$$

$$\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_z = c \quad (7.64)$$

Nach weiterer Integration

$$\begin{aligned} x, z &= \int v_{x,z} dt \\ &= \int \frac{p_{x,z}}{\gamma m} \frac{dt}{d\phi} d\phi \\ &= \int \frac{p_{x,z}}{\gamma m} \frac{1}{\omega_0 \left(1 - \frac{v_z}{c}\right)} d\phi \\ &= \int \frac{p_{x,z}}{\gamma m \omega_0 - \frac{p_z}{c}} d\phi \\ &= \int \frac{p_{x,z}}{\left(1 + \frac{p_z}{mc}\right) m \omega_0 - \frac{p_z}{c}} d\phi \\ &= \int \frac{p_{x,z}}{m \omega_0} d\phi \end{aligned} \quad (7.65)$$

erhält man schließlich die implizite, parametrische Bahnkurve

$$x = a_0 \frac{c}{\omega_0} (\cos \phi - 1) \quad (7.66)$$

$$z = \frac{1}{2} a_0^2 \frac{c}{\omega_0} \left(\frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\phi) \right) \quad (7.67)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(\phi = 0) \doteq 0 \quad (7.68)$$

$$z(\phi = 0) \doteq 0 \quad (7.69)$$

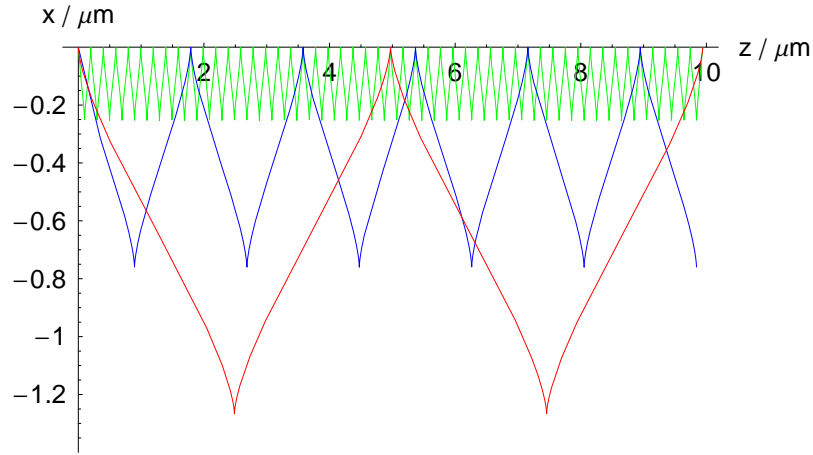


Abbildung 7.2: Relativistische Bahnkurve des Elektrons im Laborsystem für $a_0 = 1$ (grün), $a_0 = 3$ (blau) und $a_0 = 5$ (rot)

Abbildung (7.2) zeigt die relativistische Bahnkurve des Elektrons für drei verschiedene Intensitäten.

Transformiertes System

Für eine Lorentztransformation, bei der sich das System Σ' gegenüber dem System Σ mit der konstanten Geschwindigkeit v_z bewegt, gilt für die Transformation des Impulses

$$p'_x = p_x \quad (7.70)$$

$$p'_y = p_y \quad (7.71)$$

$$p'_z = \gamma_{v_z} (p_z - \gamma m v_z) \quad (7.72)$$

wobei

$$\gamma_{v_z} = \left(1 - \left(\frac{v_z}{c} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \text{const} \quad (7.73)$$

Berechnet man

$$\langle p'_z \rangle = \langle \gamma_{v_z} (p_z - \gamma m v_z) \rangle \quad (7.74)$$

$$= \gamma_{v_z} (\langle p_z \rangle - v_z m \langle \gamma \rangle) \quad (7.75)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

ergibt sich mit (7.58) und (7.46) für den mittleren Impuls im transformierten System

$$\langle p'_z \rangle = \gamma_{v_z} \left(\left\langle \frac{a_0^2 mc}{2} \sin^2 \phi \right\rangle - mv_z \left\langle 1 + \frac{a_0^2}{2} \sin^2 \phi \right\rangle \right) \quad (7.76)$$

$$= \gamma_{v_z} \left(\frac{a_0^2 mc}{4} - mv_z \left(1 + \frac{a_0^2}{4} \right) \right) \quad (7.77)$$

Transformiert man nun so, daß dieser verschwindet

$$\langle p'_z \rangle \doteq 0 \quad (7.78)$$

erhält man für die konstante Geschwindigkeit

$$v_z = \frac{a_0^2 c}{4 + a_0^2} \quad (7.79)$$

wobei

$$\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_z = c \quad (7.80)$$

Aus (7.73) folgt

$$\gamma_{v_z} = \frac{4 + a_0^2}{\sqrt{16 + 8a_0^2}} \quad (7.81)$$

und aus (7.72)

$$p'_z = -\frac{a_0^2 mc \cos(2\phi)}{\sqrt{16 + 8a_0^2}} \quad (7.82)$$

Da sich der Impuls in x-Richtung bei der Transformation wegen (7.70) nicht ändert, gilt weiterhin (7.66). Integration wie oben liefert schließlich die implizite, parametrische Bahnkurve

$$x' = a_0 \frac{c}{\omega_0} (\cos \phi - 1) \quad (7.83)$$

$$z' = -a_0^2 \frac{c}{\omega_0} \frac{\cos \phi \sin \phi}{\sqrt{16 + 8a_0^2}} \quad (7.84)$$

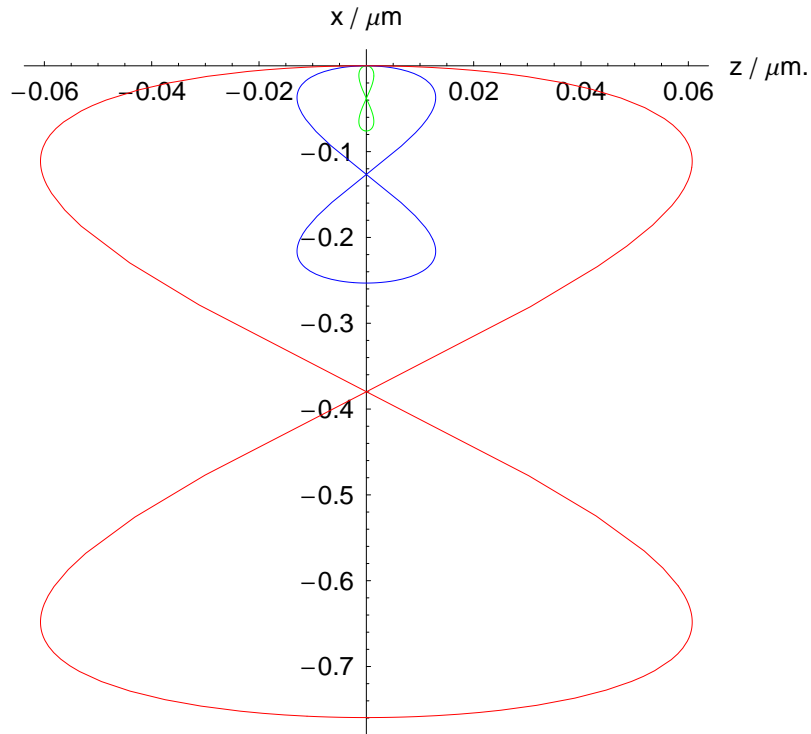


Abbildung 7.3: Achterbahn des Elektrons im transformierten System $a_0 = 0.3$ (grün), $a_0 = 1$ (blau), $a_0 = 3$ (rot) und $\phi \in [0, 2\pi]$

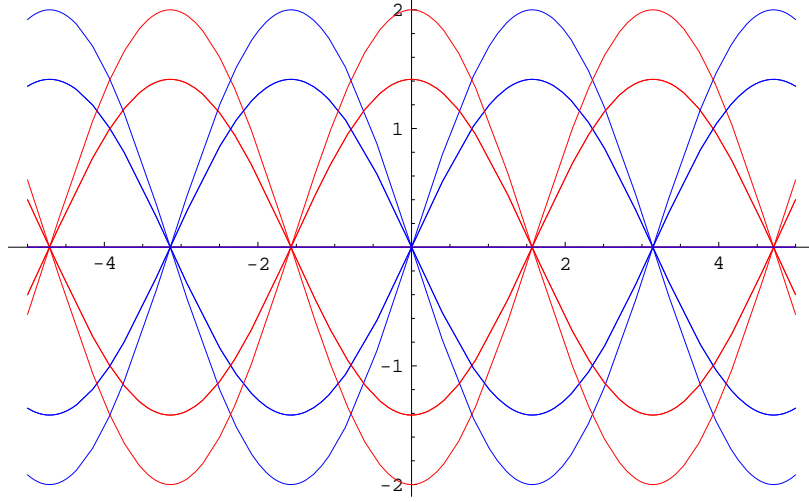


Abbildung 7.4: Stehendes elektrisches Feld (rot) und Magnetfeld (blau) für $E_0 = \omega = c = 1$

Trägt man die Trajektorie auf (s. Abb. 7.3), so erkennt man eine charakteristische Achterbahn, die sich mit steigender Feldstärke sowohl in x' - als auch in z' -Richtung aufweitet.

7.2 Freies Elektron in einer stehenden Welle

Die nach rechts-/linkslaufenden elektrischen und magnetischen Felder in einer ebenen Welle lauten

$$E_x^\pm = E_0 \cos \phi^\pm \quad (7.85)$$

und

$$B_y^\pm = \pm \frac{E_0}{c} \cos \phi^\pm \quad (7.86)$$

wobei

$$\phi^\pm = \omega t \mp kz \quad (7.87)$$

Addiert man die nach rechts-/linkslaufenden Felder, so ergibt sich für das stehende elektrische Feld

$$E_x^{ges} = 2E_0 \cos(\omega t) \cos(kz) \quad (7.88)$$

und für das stehende magnetische Feld

$$B_y^{ges} = 2 \frac{E_0}{c} \sin(\omega t) \sin(kz) \quad (7.89)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Abbildung (7.4) zeigt den räumlichen Verlauf der stehenden Welle für verschiedene Zeiten. Setzt man (7.88) und (7.89) in die relativistischen Bewegungsgleichungen (7.20) und (7.21) ein, so erhält man das gekoppelte DGL-System

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = 2a_0\omega \left[\frac{\tilde{p}_z}{\gamma} \sin(\omega t) \sin(kz) - \cos(\omega t) \cos(kz) \right] \quad (7.90)$$

$$\frac{d\tilde{p}_y}{dt} = 0 \quad (7.91)$$

$$\frac{d\tilde{p}_z}{dt} = -2a_0\omega \frac{\tilde{p}_x}{\gamma} \sin(\omega t) \sin(kz) \quad (7.92)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -2a_0\omega \frac{\tilde{p}_x}{\gamma} \cos(\omega t) \cos(kz) \quad (7.93)$$

wobei

$$\gamma = \sqrt{1 + \tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_z^2} \quad (7.94)$$

und

$$z = c \int \frac{\tilde{p}_z}{\gamma} dt \quad (7.95)$$

Erster Spezialfall

Für den Spezialfall, daß das Elektron in einem Knoten des magnetischen Feldes ruht

$$B_y^{\text{ges}} = 0, \quad k_0 z \doteq m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (7.96)$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{p}}(t=0, z=0) \doteq 0 \quad (7.97)$$

$$\Rightarrow \gamma(t=0, z=0) \doteq 0 \quad (7.98)$$

folgt

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = -2a_0\omega \cos(\omega t) \quad (7.99)$$

$$\tilde{p}_y \equiv 0 \quad (7.100)$$

$$\tilde{p}_z \equiv 0 \quad (7.101)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -2a_0\omega \frac{\tilde{p}_x}{\gamma} \cos(\omega t) \quad (7.102)$$

Die Lösung dieses gekoppelten DGL-Systems lautet

$$\tilde{p}_x(t) = -2a_0 \sin(\omega t) \quad (7.103)$$

$$\gamma(t) = \sqrt{1 + 4a_0^2 \sin^2(\omega t)} \quad (7.104)$$

Dies läßt sich auch anschaulich verstehen. In einem Knoten des magnetischen Feldes wirkt auf das Elektron nur die elektrische Kraft, so daß das Elektron nur in Polarisationsrichtung schwingen und keinen Impuls in longitudinale Richtung aufnehmen kann.

Zweiter Spezialfall

Für den Spezialfall, daß das Elektron an einem Knoten des elektrischen Feldes ruht

$$E_x^{\text{ges}} \doteq 0, k_0 z = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi, m \in \mathbb{Z} \quad (7.105)$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{p}}(t=0, z=0) \doteq 0 \quad (7.106)$$

$$\Rightarrow \gamma(t=0, z=0) \doteq 0 \quad (7.107)$$

folgt

$$\tilde{p}_x \equiv 0 \quad (7.108)$$

$$\tilde{p}_y \equiv 0 \quad (7.109)$$

$$\tilde{p}_z \equiv 0 \quad (7.110)$$

$$\gamma \equiv 1 \quad (7.111)$$

In einem Knoten des elektrischen Feldes wirkt auf das Elektron nur die Lorentzkraft. Da es aber keinen Anfangsimpuls gibt, bleibt das Elektron in Ruhe.

Numerische Lösung

Löst man das gekoppelte DGL-System mit der Anfangsbedingung, daß das Elektron nicht in einem Knoten des elektrischen oder magnetischen Feldes ruht, so ergibt sich eine etwas komplizierte Bewegung. Auf das Elektron wirkt sowohl die elektrische als auch die magnetische Kraft. Die elektrische Kraft führt zu einer linearen Schwingung, die Lorentzkraft zu einer Kreisbewegung, und die Überlagerung schließlich zu einer komplizierten Bewegung sowohl in Polarisations- als auch in longitudinaler Richtung. Abbildung (7.7)

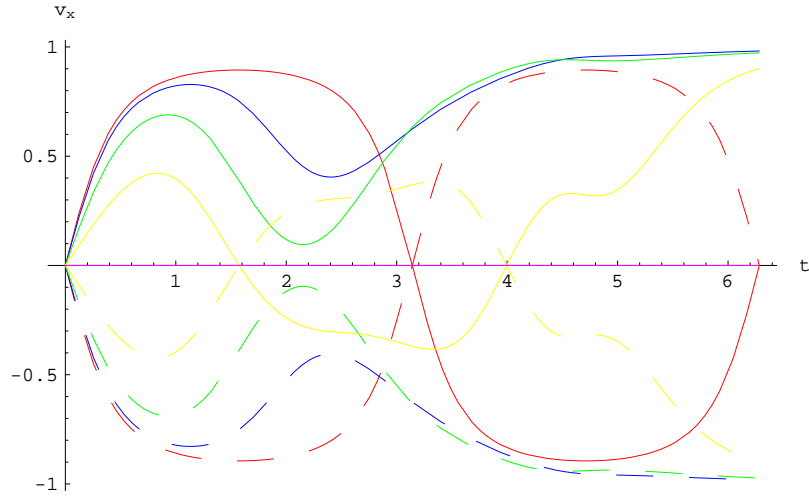


Abbildung 7.5: Geschwindigkeit v_x eines Elektrons in einer stehenden Welle für verschiedene Anfangsorte $z_0 = [0, 2\pi : \pi/8]$ mit $c = \omega = 1$, $t = [0, 2\pi]$ sowie $a_0 = 1$

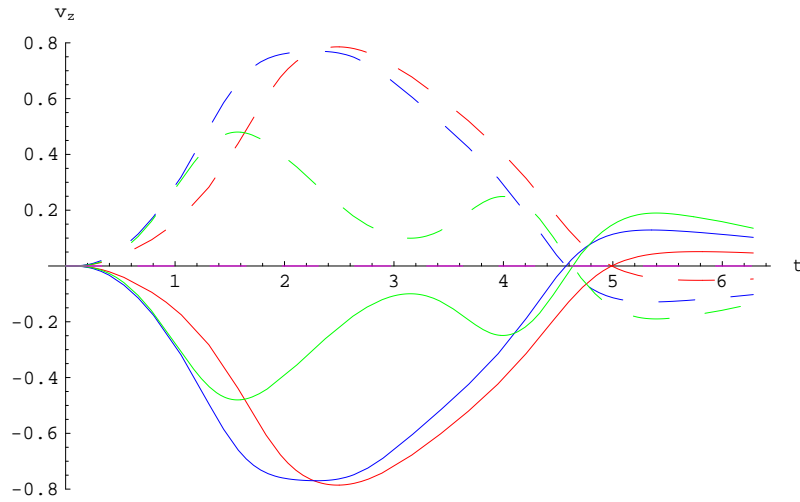


Abbildung 7.6: Longitudinale Geschwindigkeit v_z eines Elektrons in einer stehenden Welle für verschiedene Anfangsorte $z_0 = [0, 2\pi : \pi/8]$ mit $c = \omega = 1$, $t = [0, 2\pi]$ sowie $a_0 = 1$

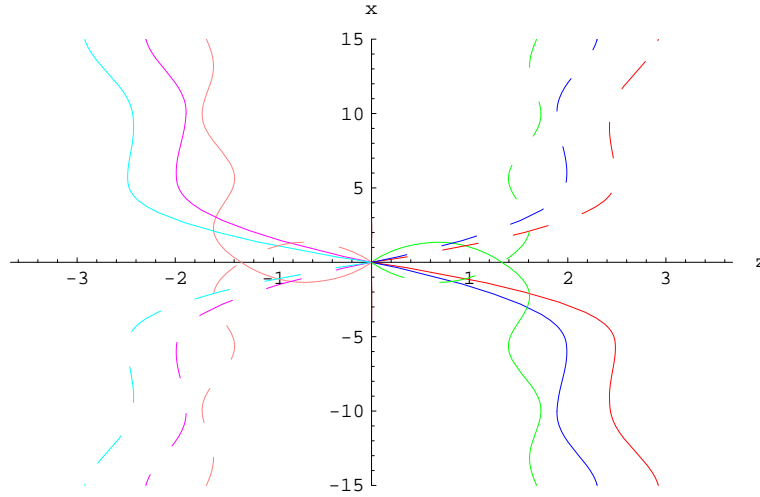


Abbildung 7.7: Relativistische Bewegung eines Elektrons in einer stehenden Welle für $c = \omega = 1$, $t = [0, 2\pi]$ sowie $a_0 = 1$

zeigt die relativistische Bahnkurve des Elektrons in einer stehenden Welle für verschiedene Anfangsorte. Alle Kurven beginnen der besseren Übersicht wegen im Ursprung bei $z = 0$.

7.3 Klassische Plasma-Dispersionsrelation

Die komplexe Darstellung des elektrischen Feldes lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega_0 t) \quad (7.112)$$

Für die Beschleunigung ergibt sich nach Newton

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (7.113)$$

Mit der Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -n_e e \dot{\mathbf{r}} \quad (7.114)$$

und Differentiation von (7.114) folgt

$$\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -n_e e \ddot{\mathbf{r}} \quad (7.115)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Einsetzen von (7.113) in (7.115) ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{n_e e^2}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (7.116)$$

Die Plasmafrequenz ist über

$$\omega_p \equiv \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m}} \quad (7.117)$$

definiert. Einsetzen von (7.117) in (7.116) liefert

$$\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \omega_p^2 \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (7.118)$$

Die Definition der Plasmaleitfähigkeit lautet

$$\sigma \equiv -\frac{i\omega_p^2 \varepsilon_0}{\omega_0} \quad (7.119)$$

Nach Einsetzen von (7.119) in (7.118) ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = i\sigma\omega_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (7.120)$$

Integration von (7.120) liefert

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (7.121)$$

Eine der Maxwellgleichungen lautet

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (7.122)$$

Einsetzen von (7.121) in (7.122) liefert

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \sigma \mathbf{E} \quad (7.123)$$

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum lautet

$$c^2 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (7.124)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Setzt man (7.139) und (7.124) in (7.123) ein, so erhält man

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\mu_0 \sigma + \frac{i\omega_0}{c^2} \right) \mathbf{E} \quad (7.125)$$

$$\Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{B} = i \frac{\omega_0}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) \mathbf{E} \quad (7.126)$$

Die dielektrische Funktion des Plasmas ist folgendermaßen definiert

$$\varepsilon \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \quad (7.127)$$

Setzt man (7.127) in (7.126) ein, so ergibt sich

$$\nabla \times \mathbf{B} = i \frac{\omega_0}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} \quad (7.128)$$

Bildet man die Rotation von (7.4), so erhält man

$$- \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (7.129)$$

Diesen Ausdruck kann man umschreiben, indem man die folgende Vektoridentität benutzt:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \quad (7.130)$$

Setzt man (7.128) und (7.130) in (7.129) ein, so ergibt sich

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} + \frac{i\omega_0 \varepsilon}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (7.131)$$

$$\Leftrightarrow \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} - \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (7.132)$$

Die Divergenz des elektrischen Feldes ist gleich der Quellenladung:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.133)$$

Nimmt man an, daß keine externen Ladungen vorliegen, so erhält man

$$\rho = 0 \quad (7.134)$$

Setzt man (7.134) in (7.133) ein, so ergibt sich

$$\nabla \mathbf{E} = 0 \quad (7.135)$$

Einsetzen von (7.135) in (7.132) liefert die Wellengleichung

$$-\Delta \mathbf{E} - \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (7.136)$$

$$\Leftrightarrow \left(k_0^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon \right) \mathbf{E} = 0 \quad (7.137)$$

Setzt man schließlich (7.127) in (7.137) ein, so erhält man die Dispersionsrelation des Plasmas

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 + k_0^2 c^2 \quad (7.138)$$

7.4 Ponderomotorische Selbstfokussierung

Das separierte elektrische Feld lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) \quad (7.139)$$

Für die Entwicklung des ortsabhängigen Teils bis zur ersten Ordnung gilt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}^2(\tilde{\mathbf{r}}) \quad (7.140)$$

Die Gesamtkraft setzt sich aus einem elektrischen und einem magnetischen Anteil zusammen

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{elek} + \mathbf{F}_{magn} \quad (7.141)$$

wobei

$$\mathbf{F}_{elek} = -e \mathbf{E} \quad (7.142)$$

und

$$\mathbf{F}_{magn} = -e (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.143)$$

Mit (7.140) erhält man

$$\mathbf{F}_{elek} = -e [(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})) \exp(i\omega t)] \quad (7.144)$$

Für die Beschleunigung am Ort \mathbf{r} gilt in nullter Näherung

$$\Delta \mathbf{a} = -\frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{m} \exp(i\omega t) \quad (7.145)$$

Integration liefert die Geschwindigkeit

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{im\omega} [1 - \exp(i\omega t)] \quad (7.146)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\Delta \mathbf{v}(0) \doteq 0 \quad (7.147)$$

und nach weiterer Integration den Ort

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{im\omega} t + \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{m\omega^2} [\exp(i\omega t) - 1] \quad (7.148)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\Delta \mathbf{r}(0) \doteq 0 \quad (7.149)$$

Setzt man dies in (7.144) ein, so ergibt sich für den elektrischen Anteil der Kraft

$$\begin{aligned} \Re[\mathbf{F}_{\text{elek}}] &= -e \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \Re(\exp(i\omega_0 t)) + \dots \right. \\ &\quad \dots + \left(\frac{et}{m\omega_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Re\left(\frac{\exp(i\omega_0 t)}{i}\right) - \dots \\ &\quad \dots - \left(\frac{e}{m\omega_0^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Re(\exp(i\omega_0 t)) + \dots \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{e}{m\omega_0^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Re^2(\exp(i\omega_0 t)) \right] \end{aligned} \quad (7.150)$$

und im zeitlichen Mittel⁴⁵⁶

$$\langle \mathbf{F}_{\text{elek}} \rangle = -\frac{e^2}{2m\omega^2} (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (7.151)$$

Setzt man (7.139) in (7.4) ein und integriert zeitlich, so erhält man

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{i\omega} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \exp(i\omega t) \quad (7.152)$$

⁴ $\langle \text{Re}[\exp(i\omega_0 t)] \rangle = 0$

⁵ $\langle \text{Re}[\exp(i\omega_0 t)/i] \rangle = 0$

⁶ $\langle \text{Re}^2[\exp(i\omega_0 t)] \rangle = 1/2$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{B}(t=0) \doteq -\frac{1}{i\omega} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \quad (7.153)$$

Wenn man (7.152) und (7.146) in (7.143) einsetzt, ergibt sich für den magnetischen Anteil der Kraft

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{magn}} &= -e [\Re [\Delta \mathbf{v}] \times \Re [\mathbf{B}]] \\ &= -\frac{e^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})}{m\omega^2} \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \operatorname{Re}^2 \left(\frac{\exp(i\omega_0 t)}{i} \right) \end{aligned} \quad (7.154)$$

und im zeitlichen Mittel⁷

$$\langle \mathbf{F}_{\text{magn}} \rangle = -\frac{e^2}{2m\omega^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \quad (7.155)$$

Addition der beiden Anteile liefert

$$\langle \mathbf{F} \rangle = -\frac{e^2}{2m\omega^2} [(\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}))] \quad (7.156)$$

und mit der Vektoridentität

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E}^2) = [(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] \quad (7.157)$$

die ponderomotorische Kraft

$$\mathbf{F}_p = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \nabla [\mathbf{E}^2(\mathbf{r})] \quad (7.158)$$

oder

$$\mathbf{F}_p \sim \nabla I \quad (7.159)$$

d. h. : die ponderomotorische Kraft ist proportional zu dem Intensitätsgradienten, der in Richtung des steilsten Anstiegs zeigt. Über

$$\mathbf{F}_p \equiv -\nabla \phi_p \quad (7.160)$$

definiert man das ponderomotorische Potential

$$\phi_p = \frac{e^2}{4m\omega^2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \quad (7.161)$$

⁷ $\langle \operatorname{Re}^2 [\exp(i\omega_0 t) / i] \rangle = 1/2$

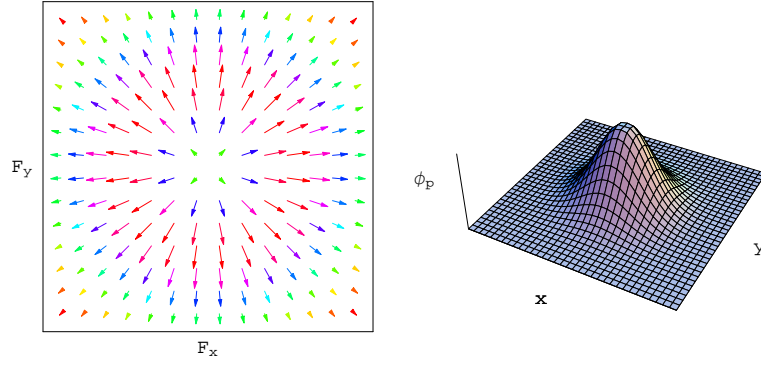


Abbildung 7.8: Ponderomotorische Kraft und ponderomotorisches Potential

Für den Ortsanteil des elektrischen Feldes eines Gaußstrahls gilt wegen (7.199)

$$E_r = \frac{E_0 W_0}{W} \exp(-qr^2) \exp(i\tilde{\varphi}_r) \quad (7.162)$$

wobei

$$q(z) \equiv \frac{1}{W^2} + \frac{ik}{2R} \quad (7.163)$$

und

$$\tilde{\varphi}_r \equiv -kz + \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (7.164)$$

Quadriert man (7.162), so ergibt sich

$$E_r^2(r) = \left(\frac{E_0 W_0}{W}\right)^2 \exp(-2qr^2) \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \quad (7.165)$$

In Zylinderkoordinaten erhält man für den Gradienten

$$\frac{\partial}{\partial r}(E_r^2) = -4 \left(\frac{E_0 W_0}{W}\right)^2 qr \exp(-2qr^2) \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \quad (7.166)$$

Für die radial nach außen wirkende ponderomotorische Kraft (7.158) ergibt sich

$$\mathbf{F}_p = \frac{e^2}{m\omega^2} \left(\frac{E_0 W_0}{W}\right)^2 qr \exp(-2qr^2) \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \hat{\mathbf{r}} \quad (7.167)$$

Die berechneten Bilder (s. Abb. 7.8) zeigen, daß die ponderomotorische Kraft das Elektron radialsymmetrisch nach außen drückt. In einem Plasma entfernen sich auf Grund dieser ponderomotorischen Kraft die Elektronen immer weiter von den viel schwereren

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Ionen, bis sich schließlich ein Gleichgewicht zwischen anziehender Coulombkraft und abstoßender ponderomotorischer Kraft einstellt. In diesem Fall ergibt sich für das statische elektrische Feld (radial nach außen zeigend)

$$\mathbf{E}_{stat} = \frac{\mathbf{F}_p}{e} = \frac{e}{m\omega^2} \left(\frac{E_0 W_0}{W} \right)^2 q r \exp(-2qr^2) \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \hat{\mathbf{r}} \quad (7.168)$$

Im Fokus bei $z = 0$ finden wir wegen $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_r = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} W = W_0$, $\lim_{z \rightarrow 0} q = 1/W_0^2$ den Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{E}_{stat} = \frac{e}{m\omega^2} \left(\frac{E_0}{W_0} \right)^2 r \exp\left(-2\frac{r^2}{W_0^2}\right) \hat{\mathbf{r}} \quad (7.169)$$

Die Elektronendichte ergibt sich aus dem differentiellen Gaußschen Satz

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{stat} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.170)$$

Berechnet man die Divergenz des Feldes

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{stat} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{E}_{stat}) \quad (7.171)$$

$$= -\frac{2e}{m\omega^2} \left(\frac{E_0 W_0}{W} \right)^2 q \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \exp(-2qr^2) (-1 + 2qr^2) \quad (7.172)$$

so erhält man die Raumladungsdichte

$$\rho = e(n_i - n_e) \quad (7.173)$$

Mit (7.170) erhält man für die Reduktion der Elektronendichte (auf die Ionendichte normiert)

$$\frac{n_e - n_i}{n_i} = \frac{2}{m\omega^2} \frac{\varepsilon_0}{n_i} \left(\frac{E_0 W_0}{W} \right)^2 q \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \exp(-2qr^2) (-1 + 2qr^2) \quad (7.174)$$

und im FokusDie ponderomotorische Kraft (die zeitliche gemittelte Lorentzkraft) ist proportional zum negativen Gradienten der Laserintensität. Der Gradient zeigt allgemein in die Richtung des steilsten Anstiegs. Die ponderomotorische Kraft (die zeitliche gemittelte Lorentzkraft) drückt das Elektron in einer Ebene senkrecht zu optischen Achse radial nach außen. Das ponderomotorische Potential (die zeitlich gemittelten kinetische Energie der Elektronen) ist im Zentrum, d. h. im Fokus, am größten und nimmt nach

außen hin ab. Das Elektron gleitet den Potentialberg herab.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{n_e - n_i}{n_i} \right) = \frac{2}{m\omega^2} \frac{\varepsilon_0}{n_i} \frac{E_0^2}{W_0^4} \exp \left(-2 \frac{r^2}{W_0^2} \right) (2r^2 - W_0^2) \quad (7.175)$$

Für die Phasengeschwindigkeit gilt

$$v_{ph} = \frac{\omega_L}{k_L} \quad (7.176)$$

Setzt man die Dispersionsrelation des Plasmas

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 + k_0^2 c^2 \quad (7.177)$$

in die Phasengeschwindigkeit ein, so erhält man

$$v_{ph} = c \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.178)$$

Berücksichtigt man noch die Plasmafrequenz

$$\omega_P \equiv \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m}} \quad (7.179)$$

so ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit des Lasers im Plasma

$$v_{ph} = c \left(\frac{1}{1 - \frac{n_e}{n_c}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.180)$$

mit der kritischen Dichte

$$n_c \equiv \frac{\varepsilon_0 m \omega_L^2}{e^2} \quad (7.181)$$

Bei größerem Abstand r von der Strahlachse wird die Elektronendichte n_e (s. Abb. 7.9) größer, damit auch die Phasengeschwindigkeit v_{ph} größer und wegen $n = c/v_{ph}$ der Brechungsindex n kleiner. Die Wellenfront krümmt sich wie bei einer konvexen Linse nach innen und, es kommt zu ponderomotorischer Selbstfokussierung.

7.5 Relativistische Selbstfokussierung

Setzt man

$$\langle p_{klass}^2 \rangle = \frac{e^2 E_0^2}{2\omega^2} \quad (7.182)$$

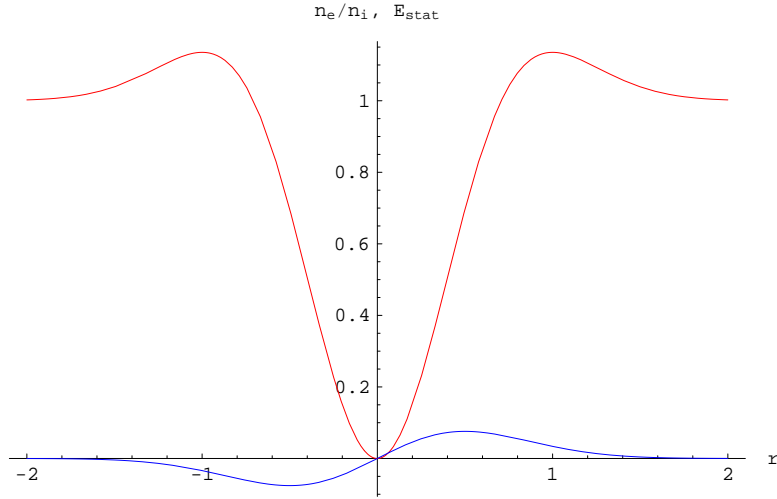


Abbildung 7.9: Normierte Elektronendichte (rot) und statisches elektrisches Feld (blau) in Abhängigkeit des radialen Abstands für $e = m = c = z_0 = \varepsilon_0 = E_0 = W_0 = 1$ und $n_i = 0,5$

in (7.23) ein, so erhält man für den Lorentzfaktor

$$\gamma \approx \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{2}} \quad (7.183)$$

wobei der relativistische Parameter

$$a_0 = \frac{eE_{x,r}(r)}{m\omega_0 c} \quad (7.184)$$

eines Gaußstrahls vom radialen Abstand abhängt. Auf Grund der relativistischen Massenzunahme

$$m \mapsto \gamma m \quad (7.185)$$

$$\Rightarrow \omega_P^2 \mapsto \frac{\omega_P^2}{\gamma} \quad (7.186)$$

ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = c \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega_P^2}{\gamma \omega_0^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.187)$$

Bei größerem Abstand r von der Strahlachse wird der Lorentzfaktor γ kleiner und damit die Phasengeschwindigkeit v_{ph} größer. Wegen $n = c_0/v_{ph}$ wird der Brechungsindex n kleiner, und es kommt zu relativistischer Selbstfokussierung.

7.6 Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen

Die Wellengleichung im Vakuum lautet

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.188)$$

Separiert man in skalarer Näherung das elektrische Feld

$$E(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) \quad (7.189)$$

so ergibt sich mit (7.8) die Helmholtzgleichung

$$(\Delta + k^2) u(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.190)$$

Wählt man für den Ortsanteil des skalaren elektrischen Feldes den Ansatz

$$u^\pm(\mathbf{r}) = \bar{A}(\mathbf{r}) \exp(\mp ikz) \quad (7.191)$$

so erhält man

$$\Delta u^\pm = \Delta_\perp u + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{A} \right) \exp(\mp ikz) + \bar{A} \left(\frac{\partial}{\partial z} \exp(\mp ikz) \right) \right] \quad (7.192)$$

$$= \Delta_\perp u + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{A} \right) \mp ik\bar{A} \right] \exp(\mp ikz) \right] \quad (7.193)$$

$$= \left[\Delta_\perp \bar{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{A} \mp 2ik \frac{\partial}{\partial z} \bar{A} - k^2 \bar{A} \right] \exp(\mp ikz) \quad (7.194)$$

und mit (7.190)

$$\left[\Delta_\perp \bar{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{A} \mp 2ik \frac{\partial}{\partial z} \bar{A} - k^2 \bar{A} \right] \exp(\mp ikz) = -k^2 \bar{A} \exp(\mp ikz) \quad (7.195)$$

wobei

$$\Delta_\perp \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (7.196)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

In paraxialer Näherung

$$2ik \frac{\partial}{\partial z} \bar{A} \gg \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{A} \quad (7.197)$$

ergibt sich schließlich die paraxiale Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{A} \pm i \frac{1}{2k} \Delta_{\perp} \bar{A} = 0 \quad (7.198)$$

zur Beschreibung der Strahlausbreitung im Raum. Löst man diese Gleichung⁸, so erhält man für die nach rechts-/linkslaufende Welle

$$E_x^{\pm}(r, z, t) = \frac{E_0 W_0}{W} \exp(-q_{\pm} r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_{\pm}) \quad (7.199)$$

mit dem komplexen Parameter

$$q_{\pm} \equiv \frac{1}{W^2} \pm \frac{ik}{2R} \quad (7.200)$$

der Strahlbreite

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (7.201)$$

der Krümmung

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right) \quad (7.202)$$

der Phase

$$\tilde{\varphi}_{\pm}(z) = \omega t \mp kz \pm \varphi \quad (7.203)$$

wobei

$$\varphi \equiv \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (7.204)$$

und der Rayleigh-Länge

$$z_0 \equiv \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \quad (7.205)$$

Für die Intensität eines einzelnen Gaußstrahls (s. Abb. 7.10 und 7.11) ergibt sich

$$I(r, z) = |E_x^{\pm}|^2 \quad (7.206)$$

$$= \left(\frac{E_0 W_0}{W}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right) \quad (7.207)$$

⁸s. Anh. (7.15)

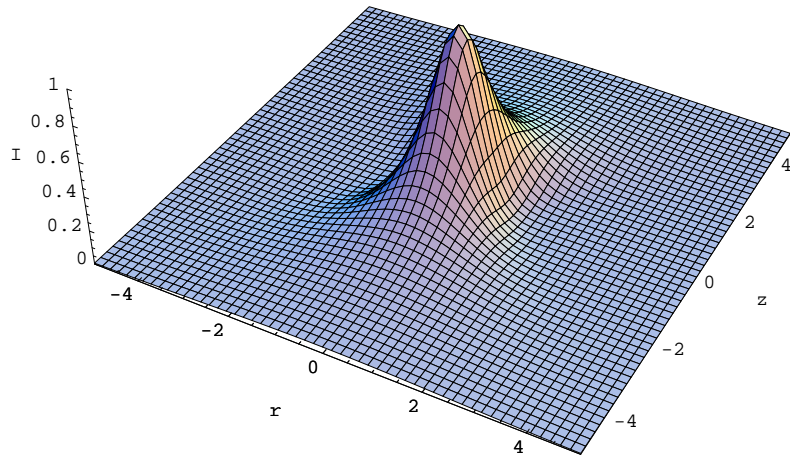


Abbildung 7.10: Intensität eines einzelnen Gaußstrahls für $E_0 = W_0 = z_0 = 1$

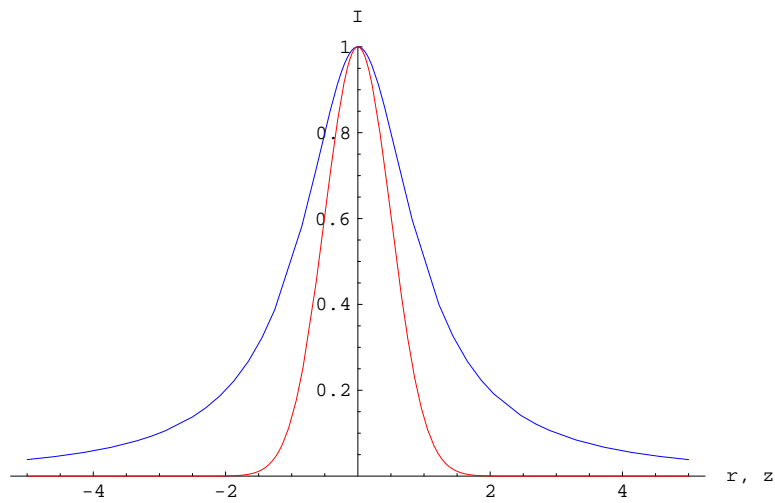


Abbildung 7.11: Schnitt durch Abbildung 7.10 \rightarrow Gaußkurve (rot) in Abhängigkeit von r und Lorentzkurve (blau) in Abhängigkeit von z

und in der Nähe des Fokus

$$I(r, z)|_{r^2=0, z=0} = E_0^2 \quad (7.208)$$

Überlagert man die nach rechts und die nach links laufende elektrische Welle

$$E_x^{ges} = E_x^+ + E_x^- \quad (7.209)$$

so ergibt sich für die stehende Welle

$$E_x^{ges} = 2 \frac{E_0 W_0}{W} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \exp(i\omega t) \cos \gamma \quad (7.210)$$

und in reeller Darstellung

$$\Re(E_x^{ges}) = \frac{1}{2} (E_x^{ges} + (E_x^{ges})^*) \quad (7.211)$$

$$= 2 \frac{E_0 W_0}{W} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \cos(\omega t) \cos \gamma \quad (7.212)$$

wobei

$$\gamma \equiv \frac{kr^2}{2R} + kz - \varphi \quad (7.213)$$

Für die Intensität der stehenden Welle (s. Abb. 7.12) ergibt sich

$$I = |E_x^{ges}|^2 \quad (7.214)$$

$$= 4 \left(\frac{E_0 W_0}{W}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right) \cos \gamma \quad (7.215)$$

und in der Nähe des Fokus

$$I(r, z)|_{r^2=0, z=0} = 4E_0^2 \quad (7.216)$$

d. h. : die Intensität einer stehenden Gaußwelle ist im Fokus vier Mal so groß wie die Intensität einer laufenden Gaußwelle. Bildet man die Rotation

$$\nabla \times \mathbf{E}^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x^\pm}{\partial z} \\ -\frac{\partial E_x^\pm}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7.217)$$

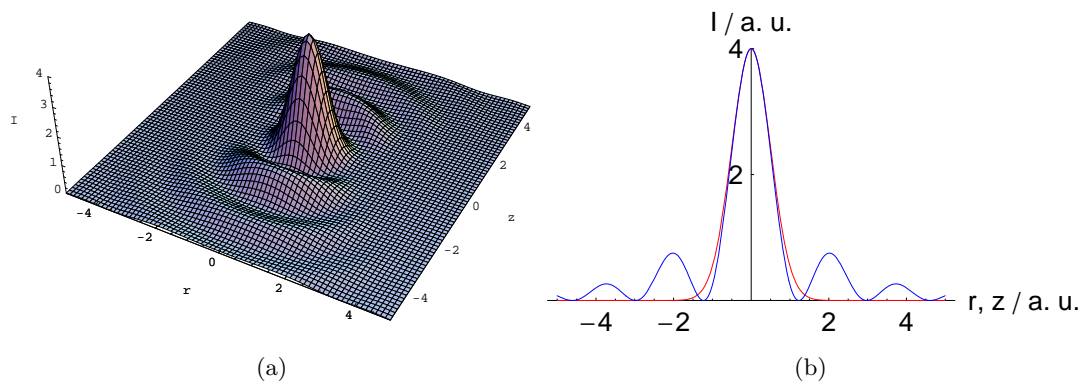


Abbildung 7.12: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen für $E_0 = W_0 = z_0 = 1$. a) Intensität eines stehenden Laserfeldes als Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen. b) Schnitt durch die dreidimensionale Darstellung. Intensität in Abhängigkeit von der radialen Koordinate (rot) und vom Abstand zum Fokus (blau). Entlang der optischen Achse entstehen charakteristische Intensitätsminima und Intensitätsmaxima. Auf Grund des Gauß'schen Strahlprofils nimmt die Einhüllende der Laserintensität mit größer werdendem Abstand vom Fokus ab.

und setzt dies in die Maxwellgleichung (7.4) ein, so erhält man

$$-\frac{\partial B_y^\pm}{\partial t} = \frac{\partial E_x^\pm}{\partial z} \quad (7.218)$$

$$\frac{\partial B_z^\pm}{\partial t} = \frac{\partial E_x^\pm}{\partial y} \quad (7.219)$$

Gauß'sche Strahlen sind somit i. a. keine transversalen elektromagnetischen Wellen, sondern nur in der Nähe des Fokus (betrachte nur erste Gleichung). Differentiation der rechts-/linkslaufenden Welle führt zu

$$\frac{\partial E_x^\pm}{\partial z} = E_0 W_0 \exp(-q_\pm r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_\pm) \left[-\frac{1}{W^2} \frac{dW}{dz} - \frac{r^2}{W} \frac{dq_\pm}{dz} + \frac{i}{W} \frac{d\tilde{\varphi}_\pm}{dz} \right] \quad (7.220)$$

Setzt man die folgenden Gleichungen

$$\frac{dq_\pm}{dz} = -\frac{2}{W^3} \frac{dW}{dz} \mp \frac{ik}{2R^2} \frac{dR}{dz} \quad (7.221)$$

$$\frac{dW}{dz} = W_0 \frac{z/z_0^2}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}} \quad (7.222)$$

$$\frac{dR}{dz} = 1 - \frac{z^2}{z_0^2} \quad (7.223)$$

$$\Rightarrow \frac{dq_\pm}{dz} = -\frac{2}{W^3} W_0 \frac{z/z_0^2}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}} \mp \frac{ik}{2R^2} \left(1 - \frac{z^2}{z_0^2} \right) \quad (7.224)$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}_\pm}{dz} = \mp k \pm \frac{1}{z_0 (1 + z^2/z_0^2)} \quad (7.225)$$

in (7.220) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x^\pm}{\partial z} &= \frac{E_0 W_0}{W} \exp(-q_\pm r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_\pm) \times \dots \\ &\dots \times \left[\frac{W_0 z}{W z_0^2 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}} \left(\frac{2r^2}{W^2} - 1 \right) + \dots \right. \\ &\left. \dots + ik \left(\pm \frac{r^2}{2R^2} \mp \frac{r^2 z_0^2}{2R^2 z^2} \pm \frac{1}{k z_0 (1 + z^2/z_0^2)} \mp 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (7.226)$$

Integriert man (7.218), erhält man die rechts-/linkslaufende Welle für das Magnetfeld in komplexer Darstellung

$$\begin{aligned}
 B_y^\pm &= -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial z} E_x^\pm \\
 &= -\frac{E_0 W_0}{W} \exp(-q_\pm r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_\pm) \times \dots \\
 &\quad \dots \times \left[-i \frac{W_0^2 z}{\omega z_0^2 W^2} \left(\frac{2r^2}{W^2} - 1 \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{1}{c} \left(\mp 1 \pm \frac{r^2}{2R^2} \mp \frac{r^2 z_0^2}{2R^2 z^2} \pm \frac{W_0^2}{kz W^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{7.227}$$

Überlagert man die nach rechts- und die nach linkslaufende magnetische Welle

$$B_y^{ges} = B_y^+ + B_y^- \tag{7.228}$$

so ergibt sich für die stehende Welle in komplexer Darstellung

$$B_y^{ges} = -2i \frac{E_0 W_0}{cW} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \exp(i\omega t) (\beta \cos \gamma - \alpha \sin \gamma) \tag{7.229}$$

und in reeller Darstellung

$$\Re[B_y^{ges}] = -2 \frac{E_0 W_0}{cW} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \sin(\omega t) (\alpha \sin \gamma - \beta \cos \gamma) \tag{7.230}$$

wobei

$$\alpha \equiv -1 + \frac{r^2}{2R^2} - \frac{r^2 z_0^2}{2R^2 z^2} + \frac{W_0^2}{kz_0 W^2} \tag{7.231}$$

$$\beta \equiv \frac{W_0^2 z}{kz_0^2 W^2} \left(1 - \frac{2r^2}{W^2} \right) \tag{7.232}$$

Abbildung (7.13) zeigt das stehende elektrische Feld und das Magnetfeld auf der optischen Achse. Die Momentaufnahmen des elektrischen Feldes sind immer symmetrisch und die des Magnetfeldes antisymmetrisch. Man sieht weiterhin, daß die Knoten des Magnetfeldes in den Bäuchen des elektrischen Feldes und die Wendepunkte des elektrischen Feldes in den Bäuchen des Magnetfeldes liegen. Insbesondere verschwindet das Magnetfeld im Ursprung für alle Zeiten

$$B_y^{ges}(z=0) \equiv 0 \forall t \tag{7.233}$$

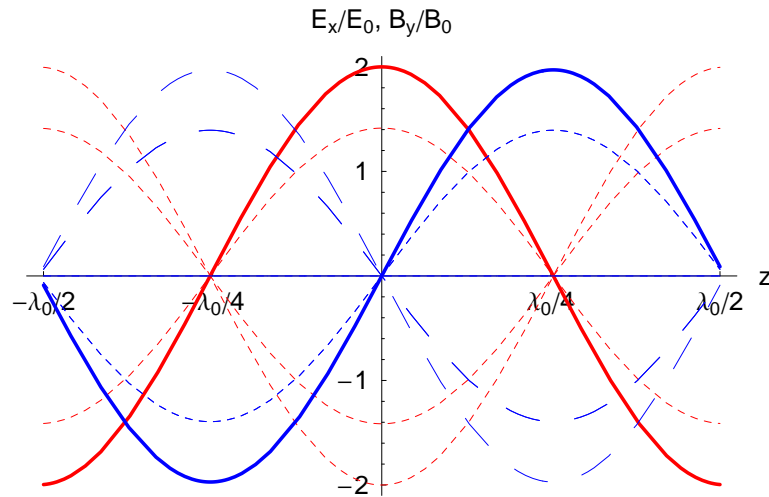


Abbildung 7.13: Stehendes elektrisches (rot) und magnetisches (blau) Feld als Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen auf der optischen Achse für $E_0 = W_0 = z_0 = 1$. Die dicken Kurven gehören zu den Zeitpunkten, bei denen die stehenden elektrischen und magnetischen Felder maximal sind. Die gestrichelten Kurven repräsentieren Momentaufnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten. Es ist eine räumlich feste Struktur mit Knoten und Bäuchen erkennbar. Für verschiedene Zeiten schwanken die Felder zwischen den Knoten auf und ab. Die Momentaufnahmen des elektrischen Feldes sind symmetrisch zur Ordinate und die des Magnetfeldes antisymmetrisch zum Ursprung. Das stehende Magnetfeld verschwindet im Fokus für alle Zeiten.

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Die Knoten des elektrischen Feldes

$$E_x^{ges} = 0 \quad (7.234)$$

liegen bei

$$\gamma = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (7.235)$$

In der Nähe des Fokus gilt

$$W \rightarrow W_0 \quad (7.236)$$

$$R \rightarrow \infty \quad (7.237)$$

$$q_{\pm} \rightarrow 1/W_0^2 \quad (7.238)$$

$$\varphi \rightarrow z/z_0 \quad (7.239)$$

$$\tilde{\varphi}_{\pm} \approx \omega t \mp kz \pm z/z_0 \quad (7.240)$$

In dieser Näherung erhält man für das elektrische Feld

$$E_x^{\pm} \approx E_0 \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp[i(\omega t \mp kz \pm z/z_0)] \quad (7.241)$$

und aus (7.227) wird

$$\begin{aligned} B_y^{\pm} &\approx -\frac{E_0}{c} \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp[i(\omega t \mp kz \pm z/z_0)] \times \dots \\ &\dots \times \left[\mp 1 \pm \frac{1}{z_0 k} - i \frac{1}{z_0 k} \frac{z}{z_0} \left(\frac{2r^2}{W_0^2} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (7.242)$$

Wenn die Taillenbreite viel größer als die Wellenlänge ist

$$W_0 \gg \lambda \quad (7.243)$$

ergibt sich eine weitere Näherung

$$z_0 k = \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \frac{2\pi}{\lambda} \quad (7.244)$$

$$= \frac{2\pi^2 W_0^2}{\lambda^2} \quad (7.245)$$

$$\Rightarrow z_0 k \gg 1 \quad (7.246)$$

und daraus folgt

$$B_y^\pm \approx \pm \frac{E_0}{c} \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp[i(\omega t \mp kz \pm z/z_0)] \quad (7.247)$$

Weiterhin ergibt sich in Fokusnähe für das stehende elektrische Feld

$$\begin{aligned} E_x^{ges} &= E_0 \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp(i\omega t) [\exp[-i(k - 1/z_0)z] + \exp[i(k - 1/z_0)z]] \\ &= 2E_0 \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp(i\omega t) \cos[(k - 1/z_0)z] \end{aligned} \quad (7.248)$$

und für das stehende Magnetfeld

$$\begin{aligned} B_y^{ges} &= \frac{E_0}{c} \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp(i\omega t) [\exp[-i(k - 1/z_0)z] - \exp[i(k - 1/z_0)z]] \\ &= -2i \frac{E_0}{c} \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp(i\omega t) \sin[(k - 1/z_0)z] \end{aligned} \quad (7.249)$$

In reeller Darstellung erhält man

$$\Re[E_x^{ges}] = 2E_0 \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \cos(\omega t) \cos[(k - 1/z_0)z] \quad (7.250)$$

und

$$\Re[B_y^{ges}] = 2 \frac{E_0}{c} \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \sin(\omega t) \sin[(k - 1/z_0)z] \quad (7.251)$$

Diesselben Ausdrücke folgen auch direkt aus (7.212) und (7.230) wegen

$$\alpha \rightarrow -1 \quad (7.252)$$

$$\beta \rightarrow 0 \quad (7.253)$$

$$\gamma \rightarrow kz - z/z_0 \quad (7.254)$$

Abb. (7.14) zeigt den Vergleich von exaktem Ergebnis und Fokusnäherung.

7.7 Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse

Die Wellengleichung in einem linearen Medium lautet

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^L(\mathbf{r}, t) \quad (7.255)$$

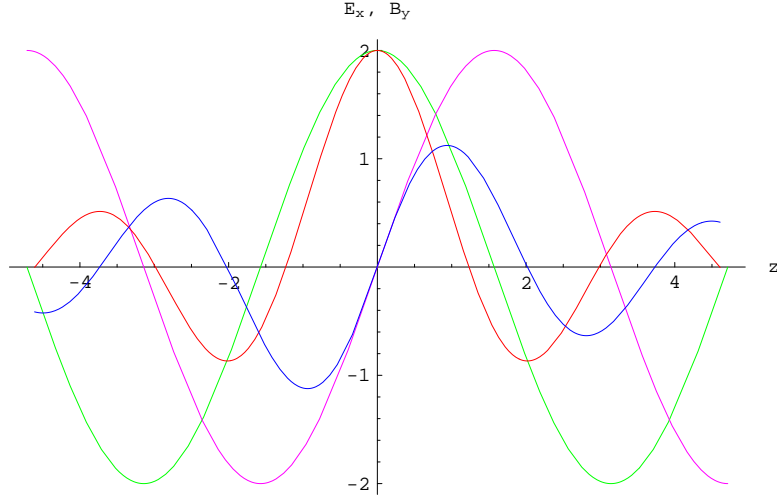


Abbildung 7.14: Elektrisches Feld (grün) und Magnetfeld (gelb) in Fokussnäherung für $E_0 = W_0 = z_0 = 1$

wobei die lineare Polarisierung im Frequenzraum durch

$$\bar{\mathbf{P}}^L(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (7.256)$$

gegeben ist. Fouriertransformation der skalaren Wellengleichung über

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega \quad (7.257)$$

liefert die skalare Helmholtzgleichung

$$[\Delta + k^2(\omega)] u(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (7.258)$$

mit der Dielektrizität

$$\varepsilon(\omega) \equiv 1 + \chi(\omega) \quad (7.259)$$

und der Dispersionsrelation

$$k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \quad (7.260)$$

Führt man die Transformationen

$$\eta^\pm = t \mp \frac{z}{v_g} \quad (7.261)$$

durch, so bewegt sich das transformierte System mit der Gruppengeschwindigkeit v_g . In der SVEA (slowly varying envelope approximation) ergibt sich schließlich die parabolische Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial z} v(\eta, z) \mp i \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} v(\eta, z) = 0 \quad (7.262)$$

zur Beschreibung der Impulsausbreitung in der Zeit. Löst man diese Gleichung⁹, so ergibt sich für die langsame Einhüllende

$$v^\pm(\eta^\pm, z) = v_0 \exp \left[- \left(1 + i \frac{y^\pm(z)}{x} \right) \left(\frac{\eta^\pm}{\tau_G^\pm(z)} \right)^2 \right] \quad (7.263)$$

wobei

$$x \equiv \frac{\tau_{G0}^2}{4(1+a^2)} \quad (7.264)$$

und

$$y^\pm(z) \equiv \frac{a\tau_{G0}^2}{4(1+a^2)} \mp \frac{Dz}{2} \quad (7.265)$$

Für die Pulsdauer gilt

$$\tau_G^\pm(z) = \sqrt{\frac{4}{x} (x^2 + y^{\pm 2}(z))} \quad (7.266)$$

Der Chirp-Parameter a ist positiv für einen Down-Chirp und negativ für einen Up-Chirp. Die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g \equiv \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \bigg|_{\omega_0} \right)^{-1} \quad (7.267)$$

und die GVD (group velocity dispersion)

$$D \equiv \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \bigg|_{\omega_0} \quad (7.268)$$

definiert man über die Ableitungen der Dispersionsrelation. Der nach rechts-/linkslaufenden Gaußpuls lautet schließlich

$$E^\pm(\eta, z) = v^\pm(\eta^\pm, z) \exp[i(\omega_0 t \mp k_0 z)] \quad (7.269)$$

Die Chirps der rechts-/linkslaufenden Gaußpulse unterscheiden sich nicht im Vorzeichen. Liegt keine Dispersion vor

⁹s. Anh. (7.16)

$$D \doteq 0 \quad (7.270)$$

so ergibt sich

$$y \equiv \frac{a\tau_{G0}^2}{4(1+a^2)} \quad (7.271)$$

sowie

$$\frac{y}{x} = a \quad (7.272)$$

Für die Pulsdauer gilt somit

$$\tau_G(z) = \tau_{G0} \quad (7.273)$$

Die instantane Frequenz ergibt sich aus der Ableitung der Phase nach der Zeit

$$\omega(t, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (7.274)$$

Differentiation der Phase

$$\Phi(t, z) = -a \left(\frac{\eta^\pm}{\tau_{G0}} \right)^2 \quad (7.275)$$

liefert

$$\omega^\pm(t, z) = -2a \frac{\eta^\pm}{\tau_{G0}^2} \quad (7.276)$$

Im Fokus bei $z = 0$ erhält man

$$\omega^\pm(t, z = 0) = -2a \frac{t}{\tau_{G0}^2} \quad (7.277)$$

D. h. : Sieht ein Beobachter bei $z = 0$ die beiden gegenläufigen Pulse auf sich zukommen, so steigt die instantane Frequenz für positive Zeiten und negativen Chirp-Parameter (Up-Chirp) für beide Pulse identisch an, und die roten Frequenzen erscheinen jeweils vor den blauen. Überlagert man den nach rechts- und den nach linkslaufenden Gaußpuls

$$E_{ges} = E^+ + E^- \quad (7.278)$$

so folgt

$$E_{ges} = 2A_1 \exp(i\omega_0 t) \exp\left[-(1+ia)\frac{t^2 + z^2/v_g^2}{\tau_{G0}^2}\right] \times \dots$$

$$\dots \times [\cosh(A) \cos(B) + i \sinh(A) \sin(B)] \quad (7.279)$$

wobei

$$A \equiv \frac{2tz}{v_g \tau_{G0}^2} \quad (7.280)$$

$$B \equiv \frac{2tza}{v_g \tau_{G0}^2} - k_0 z \quad (7.281)$$

Die Intensität erhält man über

$$I_{ges} = |E_{ges}|^2 \quad (7.282)$$

$$= 4A_1^2 \exp\left[-2\frac{t^2 + z^2/v_g^2}{\tau_{G0}^2}\right] \times \dots \quad (7.283)$$

$$\dots \times [\cosh^2(A) \cos^2(B) + \sinh^2(A) \sin^2(B)] \quad (7.284)$$

Für große Zeiten oder einen großen Abstand vom Fokus verschwindet die Intensität wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_{ges} = \lim_{z \rightarrow \infty} I_{ges} = 0 \quad (7.285)$$

Betrachtet man Pulse ohne Chirp

$$a = 0 \quad (7.286)$$

so lauten die in (7.284) vorkommenden Parameter

$$A = \frac{2tz}{v_g \tau_{G0}^2} \quad (7.287)$$

$$B = -k_0 z \quad (7.288)$$

Für die Intensität eines einzelnen Gaußpulses ohne Chirp ergibt sich

$$I = |E|^2 \quad (7.289)$$

$$= A_1^2 \exp\left[-2\left(\frac{\eta^\pm}{\tau_{G0}^\pm}\right)^2\right] \quad (7.290)$$

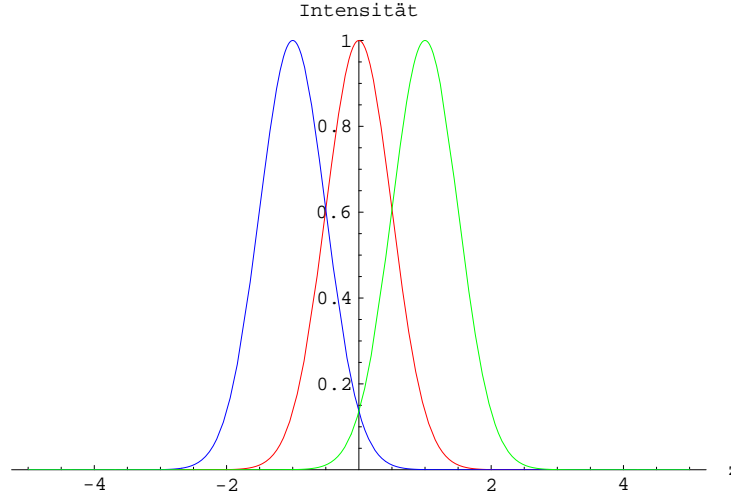


Abbildung 7.15: Intensität eines nach rechts-/links laufenden Gaußpulses ohne Chirp für $t_0 = 0$ (rot) und $t_1 = 1$ (grün/blau)

Nach (7.284) beträgt die maximale der Intensität der überlagerten Pulses im Fokus zur Zeit $t = 0$

$$I(z = 0, t = 0) = 4A_1^2 \quad (7.291)$$

Für eine beliebige Zeit gilt

$$I(z = 0, t) = 4A_1^2 \exp\left(-2\frac{t^2}{\tau_{G0}^2}\right) \quad (7.292)$$

Setzt man weiterhin

$$I(z = 0, t) \doteq \alpha I(z = 0, t = 0) \quad (7.293)$$

wobei

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (7.294)$$

so sieht man, daß die Intensität am Ort $z = 0$ nach der Zeit

$$t_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \ln(\alpha) \tau_{G0}^2} \quad (7.295)$$

auf α abgefallen ist. Die einzelnen Pulse befinden sich an der Stelle

$$z_{1/2} = t_{1/2} v_g = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \ln(\alpha) \tau_{G0}^2} v_g \quad (7.296)$$

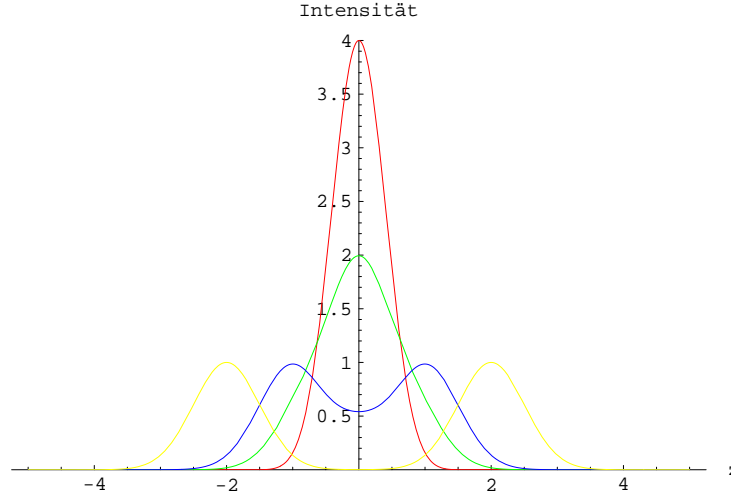


Abbildung 7.16: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse ohne Chirp für $t_0 = 0$ (rot), $t_1 = 0.59$ (grün), $t_2 = 1$ (blau) und $t_3 = 2$ (gelb) für $v_0 = k_0 = \tau_{G0} = v_g = 1$ und Chirp-Parameter $a = 0$.

Für $\alpha = 1/2$ folgt beispielsweise $t_{1/2} \approx \pm 0.59 \tau_{G0}$. Abbildung (7.15) zeigt die Intensität eines einzelnen Gaußpulses, Abbildung (7.16) die Intensität zweier gegenläufiger Gaußpulse ohne Chirp und Abbildung (7.17) mit Chirp. Man sieht, daß der Chirp zu einer zusätzlichen Modulation der Intensität führt.

7.8 Pulsfrontverkipfung eines Gauß'schen Pulses

Wir wollen die Pulsdauerverlängerung eines verkippten Pulses berechnen. Wir gehen von einem Gauß'schen Pulsprofil aus (Pulsprofil in Raum und Zeit, Gruppengeschwindigkeit des Pulses ist die Lichtgeschwindigkeit, im Fokus, d. h. $z = 0$)

$$I(r, t, z = 0) \sim \exp\left(-2 \frac{(t - z/c)^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(-\frac{2r^2}{d_0^2}\right), \quad (7.297)$$

wobei τ_p die Pulsdauer, r die radiale Koordinate in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und d_0 die räumliche Strahlbreite im Fokus (Tailenbreite) sind. Ist der Puls verkippt, d. h. die Normale der Lichtscheibe ist nicht mehr parallel zur Ausbreitungsrichtung des Pulses, so ergibt sich (durch Projektion auf die Ausbreitungsrichtung)

$$I(r, t) \sim \exp\left(-2 \frac{(t - \tilde{z}/c)^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(-\frac{2r^2}{d_0^2}\right), \quad (7.298)$$

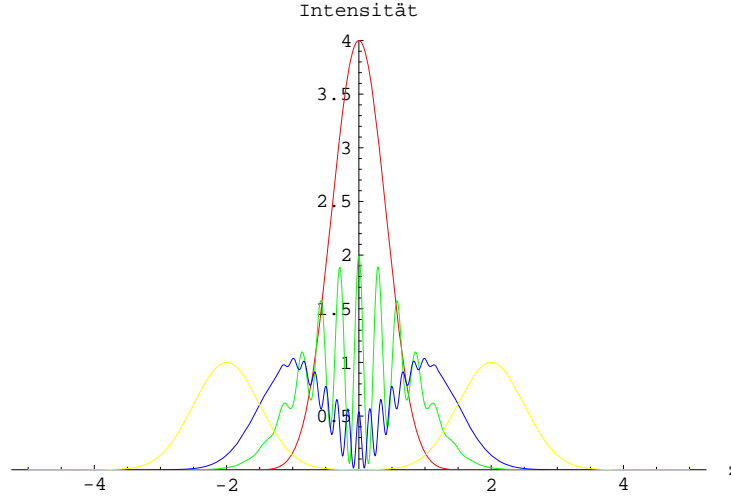


Abbildung 7.17: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse mit Chirp für $t_0 = 0$ (rot), $t_1 = 0.59$ (grün), $t_2 = 1$ (blau) und $t_3 = 2$ (gelb) für $v_0 = k_0 = \tau_{G0} = v_g = 1$ und Chirp-Parameter $a = 10$

wobei α_{kipp} der Kippwinkel der Lichtscheibe, r die radiale Koordinate, τ_p die Pulsdauer, d_0 und $\tilde{z} = r \tan \alpha_{\text{kipp}}$ die Projektion auf die z -Achse (die Ausbreitungsrichtung) sind. Integration über alle r liefert die Intensität des verkippten Pulses, welche nur noch von der Zeit t abhängig ist

$$I_{\text{kipp}}(t) \sim \exp \left[-2 \frac{t^2}{\tau_p^2 + (d_0 \tan \alpha_{\text{kipp}}/c)^2} \right], \quad (7.299)$$

und die neue Pulsdauer beträgt somit

$$\tau_{\text{kipp}} = \sqrt{\tau_p^2 + (d_0 \tan \alpha_{\text{kipp}}/c)^2}. \quad (7.300)$$

Für die Pulsverlängerung (ξ) ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\tau_{\text{kipp}}}{\tau_p} \\ &= \sqrt{\frac{\tau_p^2 + (d_0 \tan \alpha_{\text{kipp}}/c)^2}{\tau_p^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{d_0 \tan \alpha_{\text{kipp}}}{c \tau_p} \right)^2}. \end{aligned} \quad (7.301)$$

Umschreiben auf die räumliche und zeitliche Halbwertsbreite ($d_{\text{FWHM}} = \sqrt{2 \ln 2} d_0$, $\tau_{\text{p, FWHM}} = \sqrt{2 \ln 2} \tau_{\text{p}}$) liefert schließlich für die Pulsdauerverlängerung eines verkippten Pulses

$$\xi = \sqrt{1 + \left(\frac{d_{\text{FWHM}} \tan \alpha_{\text{kip}}}{c \tau_{\text{p, FWHM}}} \right)^2}. \quad (7.302)$$

7.9 Klassische Autokorrelation zweiter Ordnung

Das Autokorrelationssignal $(n + 1)$ -ter Ordnung A_{n+1} lautet allgemein ($A_{n+1} \sim I^{n+1}$, τ ist die Zeitverschiebung zwischen zwei Laserpulsen, die CCD-Kamera integriert über alle Zeiten $t = -\infty \cdots + \infty$)

$$A_{n+1}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) I^n(t - \tau) dt. \quad (7.303)$$

Das Autokorrelationssignal zweiter Ordnung ($n + 1 = 2$) lautet daher

$$A_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) I(t - \tau) dt. \quad (7.304)$$

Setzen wir ein Gauß'sches Intensitäts-(Puls)profil mit der Pulsdauer τ_{p} (halbe Pulsbreite der Einhüllenden der elektrischen Feldstärke) an

$$I \sim \exp\left(-2 \frac{t^2}{\tau_{\text{p}}^2}\right), \quad (7.305)$$

Nach der Zeit $t_{0,2}$ fällt dieses auf die Hälfte ab (FWHM)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\doteq \exp\left(-2 \frac{t_{0,2}^2}{\tau_{\text{p}}^2}\right) \\ \Leftrightarrow -\ln 2 &= -2 \frac{t_{0,2}^2}{\tau_{\text{p}}^2} \\ \Leftrightarrow t_{0,2} &= \tau_{\text{p}} \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}. \end{aligned} \quad (7.306)$$

Die Halbwertsbreite beträgt ($2 \times t_{0,2}$)

$$t_{\text{FWHM}} = \tau_{\text{p}} \sqrt{2 \ln 2}. \quad (7.307)$$

Einsetzen des Gauß'schen Intensitätsprofils in die Autokorrelationsfunktion zweiter Ordnung ergibt

$$\begin{aligned}
 A_2(\tau_{\text{korrr}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2\frac{t^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(-2\frac{(t - \tau_{\text{korrr}})^2}{\tau_p^2}\right) dt \\
 &= \exp\left(-2\frac{\tau_{\text{korrr}}^2}{\tau_p^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-4t^2 + 4t\tau_{\text{korrr}}}{\tau_p^2}\right) dt \\
 &= \exp\left(-2\frac{\tau_{\text{korrr}}^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(\frac{\tau_{\text{korrr}}^2}{\tau_p^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau_p \\
 &= \exp\left(-\frac{\tau_{\text{korrr}}^2}{\tau_p^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau_p
 \end{aligned} \tag{7.308}$$

Das Maximum des Autokorrelationssignals liegt bei

$$A_{2,\text{max}}(\tau_{\text{korrr}}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau_p \tag{7.309}$$

und die Hälfte bei

$$\frac{A_{2,\text{max}}(\tau_{\text{korrr}})}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \tau_p. \tag{7.310}$$

Für die FWHM-Korrelationsdauer zweiter Ordnung ($\tau_{\text{korrr},2}$) folgt somit

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{\pi}}{4} \tau_p &= \exp\left(-\frac{\tau_{\text{korrr},2}^2}{\tau_p^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau_p \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \exp\left(-\frac{\tau_{\text{korrr},2}^2}{\tau_p^2}\right) \\
 \Leftrightarrow \sqrt{\ln 2} &= \frac{\tau_{\text{korrr},2}}{\tau_p}
 \end{aligned} \tag{7.311}$$

Umschreiben auf die FWHM-Pulsdauer ($t_{0,2}$) liefert schließlich

$$\begin{aligned}
 t_{0,2} &= \tau_{\text{korrr},2}/\sqrt{2} \\
 &= \tau_{\text{korrr},2}/1.41.
 \end{aligned} \tag{7.312}$$

7.10 Klassische Autokorrelation dritter Ordnung

Für ein Autokorrelationssignal dritter Ordnung ($n + 1 = 3$) gilt

$$A_3(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) I^2(t - \tau) dt. \quad (7.313)$$

Wir setzen ein Gauß'sches Intensitäts-(Puls)profil an

$$I \sim \exp\left(-2\frac{t^2}{\tau_p^2}\right), \quad (7.314)$$

welches nach der Zeit

$$t_0 = \tau_p \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$$

auf die Hälfte abfällt (FWHM). Einsetzen des Gauß'schen Intensitätsprofils in das Autokorrelationssignal dritter Ordnung liefert

$$\begin{aligned} A_3(\tau_{\text{kor}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2\frac{t^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(-4\frac{(t - \tau_{\text{kor}})^2}{\tau_p^2}\right) dt \\ &= \exp\left(-4\frac{\tau_{\text{kor}}^2}{\tau_p^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-6t^2 + 8t\tau_{\text{kor}}}{\tau_p^2}\right) dt \\ &= \exp\left(-4\frac{\tau_{\text{kor}}^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(\frac{8\tau_{\text{kor}}^2}{3\tau_p^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{6}} \tau_p \\ &= \exp\left(-\frac{4}{3}\frac{\tau_{\text{kor}}^2}{\tau_p^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{6}} \tau_p \end{aligned} \quad (7.315)$$

Das Maximum dieses Signals liegt bei

$$A_{3,\text{max}}(\tau_{\text{kor}}) = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \tau_p \quad (7.316)$$

und die Hälfte des Signals bei

$$\frac{A_{3,\text{max}}(\tau_{\text{kor}})}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \tau_p. \quad (7.317)$$

Für die FWHM-Korrelationsbreite dritter Ordnung ($\tau_{\text{kor},3}$) folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \tau_p &= \exp \left(-\frac{4}{3} \frac{\tau_{\text{kor},3}^2}{\tau_p^2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{6}} \tau_p \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \exp \left(-\frac{4}{3} \frac{\tau_{\text{kor},3}^2}{\tau_p^2} \right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{\ln 2} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\tau_{\text{kor},3}}{\tau_p} \end{aligned} \quad (7.318)$$

und nach Umschreiben auf die FWHM-Pulsdauer ($t_{0,3}$) schließlich

$$\begin{aligned} t_{0,3} &= \tau_{\text{kor},3} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= \tau_{\text{kor},3} / 1.22. \end{aligned} \quad (7.319)$$

D. h. Um die FWHM-Pulsdauer zu erhalten, müssen wir die FWHM-Breite der Autokorrelationsfunktion (im Falle dritter Ordnung!) mit dem Faktor $\sqrt{2/3}$ multiplizieren bzw. durch den Faktor $\sqrt{3/2} \approx 1.22$ teilen. Die FWHM-Pulsdauer ist somit kleiner als die FWHM-Korrelationsbreite.

7.11 $q_{1/e}$ -Parameter eines idealen Gauß'schen Pulses

Für die Intensität eines einzelnen idealen Gauß'schen Pulses gilt (Faltung eines räumlichen und eines zeitlichen Gauß'schen Profils)

$$I(r, z, t) = I_0(z) \exp \left[-2 \frac{r^2}{W(z)^2} \right] \exp \left[-2 \left(\frac{t - z/v_g}{\tau_L} \right)^2 \right] \quad (7.320)$$

mit der Amplitude

$$I_0(z) = \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)} \right)^2. \quad (7.321)$$

Zunächst bestimmen wir den radialen Abstand r_0 von der optischen Achse, bei dem das transversale, räumliche Intensitätsprofil auf $1/e$ abfällt

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} &\doteq \exp \left(-2 \frac{r_0^2}{W(z)^2} \right) \\ \Leftrightarrow -1 &= -2 \frac{r_0^2}{W(z)^2}. \end{aligned} \quad (7.322)$$

Daraus folgt

$$r_0 = \frac{W(z)}{\sqrt{2}}. \quad (7.323)$$

Wir wollen das Verhältnis der Energie innerhalb der $1/e$ -Fläche zur Gesamtenergie berechnen. Wir bezeichnen es als

$$q_{1/e} \equiv \frac{E_{1/e}}{E_{\text{ges}}}. \quad (7.324)$$

Die Energie erhalten wir allgemein, indem wir die Intensität über die Zeit und die Fläche integrieren

$$\begin{aligned} E [\text{J}] &= \int dt \int dA I(r, z, t) \\ &= \int dt \int 2\pi r dr I(r, z, t), \end{aligned} \quad (7.325)$$

wobei dA ein Flächenelement ist. Die Energie innerhalb der $1/e$ -Fläche erhalten wir, indem wir von der optischen Achse bis zur Stelle r_0 integrieren, bei der Intensität auf $1/e$ abgefallen ist, d. h. $r = 0 \dots r_0$. Die Gesamtenergie erhalten wir, indem wir über die ganze x, y -Ebene integrieren, d. h. $r = 0 \dots \infty$. Da wir die auf eine CCD-Kamera auftreffende Energie bestimmen, integrieren wir jeweils über alle Zeiten

$$E_{1/e} = I_0(z) \int_0^{r_0} 2\pi r \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right) dr \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-2\left(\frac{t-z/v_g}{\tau_L}\right)^2\right] dt \quad (7.326)$$

$$E_{\text{ges}} = I_0(z) \int_0^{\infty} 2\pi r \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right) dr \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-2\left(\frac{t-z/v_g}{\tau_L}\right)^2\right] dt. \quad (7.327)$$

Setzen wir dies in den $q_{1/e}$ -Parameter ein, so folgt

$$q_{1/e} = \frac{\int_0^{r_0} 2\pi r \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2}\right) dr \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-2\left(\frac{t-z/v_g}{\tau_L}\right)^2\right] dt}{\int_0^{\infty} 2\pi r \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2}\right) dr \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-2\left(\frac{t-z/v_g}{\tau_L}\right)^2\right] dt} \quad (7.328)$$

Wir berechnen zuerst die Raumintegrale

$$J_1 = \int_0^{r_0=W/\sqrt{2}} 2\pi r \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2}\right) dr = \frac{1}{2}\pi W^2 \left(1 - \frac{1}{e}\right) \quad (7.329)$$

und

$$J_2 = \int_0^\infty 2\pi r \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2}\right) dr = \frac{1}{2}\pi W^2. \quad (7.330)$$

Für das Zeitintegral gilt

$$\begin{aligned} J_t &= \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \exp\left[-2\left(\frac{t - z/v_g}{\tau_L}\right)^2\right] dt = \tau_L \int_{t'=-\infty}^{t'=+\infty} \exp[-2t'^2] dt' \\ &= \tau_L \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{2}t'\right) \Big|_{t'=-\infty}^{t'=+\infty} = \tau_L \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (7.331)$$

mit der Substitution

$$t' = \frac{t - z/v_g}{\tau_L}. \quad (7.332)$$

Die Funktion $\operatorname{erf}(\tilde{z})$ ist die Gauß'sche Fehlerfunktion an einer beliebigen Stelle \tilde{z} . Für den $q_{1/e}$ -Parameter erhalten wir schließlich (das Zeitintegral kürzt sich dabei heraus)

$$q_{1/e} = \frac{J_1}{J_2} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0.63. \quad (7.333)$$

D. h. Für einen idealen Gauß'schen Puls beträgt der $q_{1/e}$ -Parameter 0.63, so daß 63 % der Gesamtenergie innerhalb der $1/e$ -Fläche liegen.

7.12 Relativistische Autokorrelation

Wir beschreiben die Laserpulse als ideale Gaußpulse. Für das räumlich und zeitlich abhängige elektrische Feld des von links kommenden Pulses gilt

$$\begin{aligned} E_L(r, z, t) &= \frac{E_{0L}W_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(z)}\right) \times \exp\left(-i\frac{kr^2}{2R(z)}\right) \times \\ &\times \exp\left[-\left(\frac{t - z/c}{\tau_L}\right)^2\right] \exp\left[i\left(\omega t - kz + \eta(z)\right)\right] \end{aligned} \quad (7.334)$$

mit den Abkürzungen

$$W^2(z) = W_0^2\left(1 + (z/z_0)^2\right) \quad (7.335)$$

$$R(z) = z\left(1 + (z_0/z)^2\right) \quad (7.336)$$

$$\eta(z) = -\tan^{-1}(z/z_0) \quad (7.337)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Berücksichtigen wir, daß durch die Strahlteilerverschiebung Δx eine Laufzeitverschiebung von

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x}{\cos(\pi/4)c} \quad (7.338)$$

eintritt und der Fokus nicht bei Null sondern bei $z_1 \neq 0$ sitzt, so ergibt sich für das elektrische Feld des von rechts kommenden Pulses

$$\begin{aligned} E_R(r, z - z_1, t - \Delta\tau) &= \frac{E_{0R}W_0}{W(z - z_1)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(z - z_1)}\right) \exp\left(i\frac{kr^2}{2R(z - z_1)}\right) \times \\ &\times \exp\left[-\left(\frac{t + (z - z_1)/c - \Delta\tau}{\tau_L}\right)^2\right] \times \\ &\times \exp\left[i\left(\omega(t - \Delta\tau) + k(z - z_1) - \eta(z - z_1)\right)\right]. \end{aligned} \quad (7.339)$$

Die beobachtete Strahlung ist nichtlineare Thomsonstreuung. Um die abgestrahlte Intensität zu berechnen, gehen wir von der relativistischen Bewegung der Elektronen aus. Die relativistischen Bewegungsgleichungen für ein freies Elektron in einer elektromagnetischen Welle lauten

$$\frac{d(\gamma m \mathbf{v})}{dt} = -e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (7.340)$$

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} \quad (7.341)$$

mit dem Lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}/c)^2}}. \quad (7.342)$$

Setzen wir $\gamma = \text{const}$ (gültig für den schwach relativistischen Fall), so vereinfachen sich die relativistischen Bewegungsgleichungen zu

$$\gamma m \frac{d^2 \dot{\mathbf{r}}}{dt^2} = -e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \quad (7.343)$$

Wir gehen von einer ebenen elektromagnetischen Welle (das elektrische Feld ist in x -Richtung linear polarisiert) mit Ausbreitungsrichtung z aus

$$\mathbf{E} = E(t) \hat{\mathbf{e}}_x \quad (7.344)$$

$$\mathbf{B} = \frac{E(t)}{c} \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (7.345)$$

wobei $E(t) = E_0 \cos(\omega t - kz)$ gilt. Setzen wir das Kreuzprodukt

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\dot{z}E(t)/c \\ 0 \\ \dot{x}E(t)/c \end{pmatrix} \quad (7.346)$$

in (7.343) ein, so ergibt sich das vereinfachte Differentialgleichungssystem

$$\gamma m \ddot{x} = -eE(t) + e\dot{z}E(t)/c \quad (7.347)$$

$$\gamma m \ddot{y} = 0 \quad (7.348)$$

$$\gamma m \ddot{z} = -e\dot{x}E(t)/c. \quad (7.349)$$

Integration durch Störungsrechnung mit der Anfangsbedingung, daß sich das Elektron zum Zeitpunkt $t = -\infty$ im Maximum des elektrischen Feldes befindet, d. h. $\dot{x}(t = -\infty) = 0$, $x(t = -\infty) = 0$, $\dot{z}(t = -\infty) = 0$ und $z(t = -\infty) = 0$, liefert

$$\ddot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m} E(t) \quad (7.350)$$

$$\rightarrow \dot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m} \int_{-\infty}^t E(t') dt'. \quad (7.351)$$

Setzen wir dies in (7.349) ein, so erhalten wir die Beschleunigung in erster Ordnung Störungstheorie

$$\ddot{z}^{(1)} = \frac{e^2}{\gamma^2 m^2 c} E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt'. \quad (7.352)$$

Da diese Beziehung unabhängig von der Gestalt des elektrischen Feldes $E(t)$ ist, gilt sie sowohl für laufende als auch für stehende Wellen.

Um zu zeigen, daß $\ddot{z}^{(1)}$ eine sinnvolle Näherung darstellt, schätzen wir die einzelnen Glieder der Reihenentwicklung ab. Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir $E(t) = E_0 \cos \omega t$ und integrieren vom Zeitpunkt $t = 0$ an, d. h. $\dot{x}(t = 0) = 0$, $x(t = 0) = 0$, $\dot{z}(t = 0) = 0$ und $z(t = 0) = 0$. Aus (7.350) folgt

$$\ddot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m} E_0 \cos \omega t \quad (7.353)$$

$$= -\frac{\omega c}{\gamma} a_0 \cos \omega t \quad (7.354)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

mit dem relativistischen Parameter $a_0 = eE_0/m\omega c$. Für schwach relativistische Intensitäten dürfen wir $\gamma \approx 1$ setzen, so daß

$$\ddot{x}^{(0)} \approx -\omega c a_0 \cos \omega t \quad (7.355)$$

$$\rightarrow \dot{x}^{(0)} = -c a_0 \sin \omega t \quad (7.356)$$

folgt. Setzen wir (7.356) in (7.349) ein, so finden wir

$$\ddot{z}^{(1)} = \frac{1}{2} c \omega a_0^2 \sin(2\omega t) \quad (7.357)$$

$$\rightarrow \dot{z}^{(1)} = -\frac{1}{4} c a_0^2 [1 - \cos(2\omega t)]. \quad (7.358)$$

Setzen wir weiterhin (7.358) in (7.347) ein, so ergibt sich

$$\ddot{x}^{(2)} = \frac{1}{8} \omega c a_0^3 \cos(3\omega t) - \omega c a_0 \left(1 + \frac{1}{8} a_0^2\right) \cos(\omega t) \quad (7.359)$$

$$\rightarrow \dot{x}^{(2)} = \frac{1}{24} c a_0^3 \sin(3\omega t) - c a_0 \left(1 + \frac{1}{8} a_0^2\right) \sin(\omega t). \quad (7.360)$$

Weiterhin folgt

$$\ddot{z}^{(3)} = \frac{1}{2} c \omega \left(1 + \frac{1}{12} a_0^2\right) \sin(2\omega t) - \frac{\omega c a_0^4}{48} \sin(4\omega t). \quad (7.361)$$

Die relative Korrektur zur Amplitude der zweiten Harmonischen beträgt also $|\Delta \ddot{z}|/|\ddot{z}| = a_0^2/12$. Da die abgestrahlte Leistung mit $|\ddot{z}|^2$ skaliert, ist die Korrektur zur Leistung $\Delta P/P = a_0^4/144$. Für den gemessenen relativistischen Parameter $a_0 = 1.2$ erhalten wir $\Delta P/P \approx 1\%$, d. h. die durch Störungsreihenentwicklung vernachlässigten Korrekturen liegen im Prozentbereich.

Das abgestrahlte elektrische Feld eines einzelnen Elektrons lautet allgemein

$$|E_T| = \frac{e \ddot{z}(t - \rho/c) \sin \vartheta}{4\pi \epsilon_0 c^2 \rho}, \quad (7.362)$$

wobei ρ der Beobachtungsabstand und ϑ der Beobachtungswinkel sind. Da wir unter $\vartheta \approx 90^\circ$ beobachten, d. h. $\sin \vartheta \approx 1$, folgt $\rho = \text{const.}$ Setzen wir (7.352) in (7.362) ein, so ergibt sich für das Betragquadrat der Feldstärke

$$|E_T|^2 = \frac{e^2 r_e^2}{m^2 c^2 \gamma^4 \rho^2} \left| E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt' \right|^2, \quad (7.363)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

mit dem klassischen Elektronenradius $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$. Für die auf die CCD-Kamera auftreffende zeitintegrierte Energie erhalten wir

$$S(\Delta\tau, z, z_1) = \frac{\epsilon_0 c e^2 r_e^2}{m^2 c^2 \gamma^4 \rho^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt' \right|^2 dt \quad (7.364)$$

Wenn die Einhüllende von $E(t)$ hinreichend langsam veränderlich und für $t \rightarrow -\infty$ gegen Null geht, dann gilt die Beziehung

$$\int_{-\infty}^t E(t') dt' = \frac{1}{i\omega} E(t), \quad (7.365)$$

Damit ergibt sich für das Meßsignal

$$S(\Delta\tau, z, z_1) = \frac{\epsilon_0 c r_e^2}{m^2 c^2 \gamma^4 \rho^2 \omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |E^2(t)|^2 dt. \quad (7.366)$$

Wegen $|E^2|^2 = E E E^* E^* = E E^* E E^* = I^2$ folgt $S(\Delta\tau, z, z_1) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} I(t)^2 dt$. Daher handelt es sich um ein intensitätsabhängiges Signal zweiter Ordnung!

Wir berechnen nun das Integral

$$S \sim J = \int_{-\infty}^{+\infty} |E^2(t)|^2 dt. \quad (7.367)$$

wobei sich das elektrische Feld aus der Summe der Felder des von links- und des von rechtskommenden Pulses zusammensetzt

$$E(t) = E_L(t) + E_R(t). \quad (7.368)$$

Für den Integranden aus (7.367) erhalten wir

$$\begin{aligned} I_n &= \left| (E_L + E_R)^2 \right|^2 \\ &= [E_L^2 + E_R^2 + 2E_L E_R] [E_L^{2*} + E_R^{2*} + 2E_L^* E_R^*] \\ &= |E_L^2|^2 + |E_R^2|^2 + 4|E_R|^2 |E_L|^2 + \\ &\quad + E_L^2 E_R^{2*} + E_R^2 E_L^{2*} + 2E_R^2 E_L^* E_R^* + \\ &\quad + 2E_L^2 E_L^* E_R^* + 2E_L E_R E_L^{2*} + 2E_L E_R E_R^{2*}. \end{aligned} \quad (7.369)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Die räumlich schnell oszillierenden Anteile $E_L^2 E_R^{2*}$, $E_R^2 E_L^{2*}$ sowie $2E_R^2 E_L^* E_R^*$, $2E_L^2 E_L^* E_R^*$, $2E_L E_R E_L^{2*}$ und $2E_L E_R E_R^{2*}$ entfallen bei unserer Abbildung wegen einer räumlichen Auflösung von $5 \mu\text{m}$. Die Messung ist nicht interferometrisch!

$$I_n = |E_L^2|^2 + |E_R^2|^2 + 4 |E_R|^2 |E_L|^2.$$

Setzen wir die Felder (7.334) und (7.339) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} S \sim & \frac{E_{0L}^4 W_0^4}{W^4(z)} \exp\left(-4 \frac{r^2}{W^2(z)}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(t - \frac{z}{c}\right)^2\right] dt + \\ & + \frac{E_{0R}^4 W_0^4}{W^4(z - z_1)} \exp\left(-4 \frac{r^2}{W^2(z - z_1)}\right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(t + \frac{z - z_1}{c} - \Delta\tau\right)^2\right] dt + \\ & + \frac{4E_{0L}^2 E_{0R}^2 W_0^4}{W^2(z) W^2(z - z_1)} \exp\left[-2r^2 \left(\frac{1}{W^2(z)} + \frac{1}{W^2(z - z_1)}\right)\right] \times \\ & \times \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z - z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2}\right)^2\right] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(t - \frac{1}{2} \left(\frac{z_1}{c} + \Delta\tau\right)\right)^2\right] dt \end{aligned} \quad (7.370)$$

Für die Zeitintegrale gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2} (t \pm t_0)^2\right] dt = \frac{\tau_L}{2} \sqrt{\pi} \quad (7.371)$$

unabhängig von t_0 . Die Integration über das Volumen führt auf

$$I_a = \int_0^\infty 2\pi r \exp(-ar^2) dr = \frac{\pi}{a}. \quad (7.372)$$

Setzen wir (7.371) und (7.372) in das räumlich und zeitlich integrierte Signal ein

$$S \sim \int_0^\infty 2\pi r dr \int_{-\infty}^{+\infty} |E^2(t)|^2 dt, \quad (7.373)$$

so ergibt sich

$$S \sim \frac{E_{0L}^4}{4W^2(z)} + \frac{E_{0R}^4}{4W^2(z - z_1)} + \frac{2E_{0L}^2 E_{0R}^2 W_0^4}{W^2(z) + W^2(z - z_1)} \times \\ \times \exp \left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z - z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \right] \quad (7.374)$$

Mit der Beziehung

$$W^2(z) + W^2(z - z_1) = 2W_0^2 \left[1 + \left(\frac{z - z_1/2}{z_0} \right)^2 + \frac{z_1^2}{4z_0^2} \right] \quad (7.375)$$

erhalten wir schließlich

$$S(z, z_1, \Delta\tau) \sim \frac{I_{0L}^2}{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} + \frac{I_{0R}^2}{1 + \left(\frac{z - z_1}{z_0} \right)^2} + \frac{4I_{0L}I_{0R}}{1 + \left(\frac{z - z_1/2}{z_0} \right)^2 + \frac{z_1^2}{4z_0^2}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z - z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \right] \quad (7.376)$$

Wir können nun verschiedene Fälle diskutieren:

1. Für identische Intensitäten $I_{0L} = I_{0R}$ und zusammenfallende Foki $z_1 = 0$ der beiden gegenläufigen Pulse bekommen wir ein maximales Signal

$$S(z, z_1 = 0, \Delta\tau) \sim \frac{2}{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} \left[1 + 2 \exp \left(-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z}{c} - \frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \right) \right] \quad (7.377)$$

In diesem Fall sehen wir einen Peak auf der CCD-Kamera. Das Verhältnis von Untergrund zu maximalem Signal ist

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow \infty} \frac{S(z, z_1, \Delta\tau)}{S(z = c\Delta\tau/2, z_1, \Delta\tau)} = 1/3. \quad (7.378)$$

2. Für identische Intensitäten $I_{0L} = I_{0R}$ und verschiedene Foki $z_1 \neq 0$ der beiden

gegenläufigen Pulse bekommen wir das Signal

$$S(z, z_1 \neq 0, \Delta\tau) \sim \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{z-z_1}{z_0}\right)^2} + \frac{4}{1 + \left(\frac{z-z_1/2}{z_0}\right)^2 + \frac{z_1^2}{4z_0^2}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z - z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \right]. \quad (7.379)$$

Überlappen sich die Pulse in keinem der Peaks, d. h.

$$\Delta\tau \gg \frac{z - z_1/2}{2}, \quad (7.380)$$

dann ergibt sich

$$S\left(z, z_1, \Delta\tau \gg \frac{z - z_1/2}{2}\right) \sim \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{z-z_1}{z_0}\right)^2}.$$

In diesem Fall sehen wir zwei identische Peaks etwa gleicher Höhe bei $z = 0$ und bei $z = z_1$. Da sich die Pulse nicht überlappen, handelt es sich um die Signale von laufenden Wellen. Es ist wichtig, daß unsere Beschreibung einheitlich für stehende und laufende Wellen gilt. Überlappen sich die Pulse bei $z = 0$, d. h. $\Delta\tau = -z_1/c$, und gilt außerdem $z_1 \gg z_0$ (z. B. $z_1 = 4z_0$), dann ergibt sich

$$S(z, z_1 = 4z_0, \Delta\tau = -z_1/c) \sim \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{z-4z_0}{z_0}\right)^2} + \\ + \frac{4}{1 + \left(\frac{z-2z_0}{z_0}\right)^2 + 4} \exp \left[-\frac{4z^2}{\tau_L^2 c^2} \right]. \quad (7.381)$$

Bei $z = 0$ und bei $z = z_1$ finden wir bei einer Rayleighlänge von $z_0 = 18 \mu\text{m}$ und mit $\tau_L c = 30 \mu\text{m}$ das Verhältnis der beiden Peakhöhen

$$\frac{S(z = 0, z_1 = 4z_0, \Delta\tau = -z_1/c)}{S(z = z_1, z_1 = 4z_0, \Delta\tau = -z_1/c)} \approx 1.4. \quad (7.382)$$

3. Wenn beispielsweise die Intensität des von rechts kommenden Pulses doppelt so hoch ist wie die Intensität des von links kommenden Pulses ($I_L = 2I_R$), dann

erhalten wir das Verhältnis

$$\frac{S(z=0, z_1=4z_0, \Delta\tau=-z_1/c)}{S(z=z_1, z_1=4z_0, \Delta\tau=-z_1/c)} \approx 3.7. \quad (7.383)$$

D. h. Wir sehen einen deutlichen Unterschied der beiden Peakhöhen.

7.13 Laser Wake-Field

7.13.1 Laser-Plasma-Welle

Das Vektorpotential einer linear polarisierten ebenen Welle lautet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.384)$$

wobei

$$A_x \equiv -\frac{a_0 mc}{e} \sin \phi \quad (7.385)$$

und

$$\phi \equiv \omega t - kz \quad (7.386)$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen lassen sich als gekoppelte P-DGL's für die Potentiale A und ϕ schreiben

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.387)$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (7.388)$$

In der Coulomb-Eichung

$$\nabla\mathbf{A} = 0 \quad (7.389)$$

ergibt sich

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.390)$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi - \mu_0 \mathbf{j} \quad (7.391)$$

Die Felder erhält man über

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.392)$$

und

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7.393)$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, die dimensionslosen Parameter

$$\mathbf{a} \equiv \frac{e\mathbf{A}}{mc} \quad (7.394)$$

$$\varphi \equiv \frac{e\Phi}{mc^2} \quad (7.395)$$

$$\tilde{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathbf{p}}{mc} \quad (7.396)$$

$$\tilde{n} \equiv \frac{n}{n_0} \quad (7.397)$$

einzuführen. Der relativistische Impuls

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad (7.398)$$

lautet nach der Normierung auf den Ruheimpuls

$$\tilde{\mathbf{p}} \equiv \gamma \beta \quad (7.399)$$

wobei

$$\beta \equiv \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (7.400)$$

Mit (7.57) und

$$a_x = -a_0 \sin \phi \quad (7.401)$$

ergibt sich

$$\tilde{p}_x = a_x \quad (7.402)$$

Setzt man (7.42), (7.402) und

$$\tilde{p}_z = \gamma \beta_z \quad (7.403)$$

in (7.23) ein, so erhält man für den Lorentzfaktor

$$\gamma = \sqrt{\frac{1+a^2}{1-\beta_z^2}} \quad (7.404)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Setzt man die Stromdichte

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v} \quad (7.405)$$

in (7.390) und die Ladungsdichte

$$\rho = -e(n - n_0) \quad (7.406)$$

in (7.391) ein, so erhält man mit der Lichtgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (7.407)$$

und der Wellenzahl des Plasmas

$$k_P \equiv \frac{\omega_P}{c} \quad (7.408)$$

für das PDGL-System

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{a} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + k_P^2 \tilde{n} \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{\gamma} \quad (7.409)$$

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = k_P^2 (\tilde{n} - 1) \quad (7.410)$$

mit der Plasmafrequenz

$$\omega_P^2 \equiv \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \quad (7.411)$$

Setzt man die Stromdichte

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (7.412)$$

in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (7.413)$$

ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (7.414)$$

Setzt man noch (7.392) und (7.393) in die relativistische Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.415)$$

ein und benutzt

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (7.416)$$

so ergibt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \tilde{\mathbf{p}} = c \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (7.417)$$

Die Transformation

$$(z, t) \rightarrow (\xi, \tau) \quad (7.418)$$

mit

$$\xi = z - v_g t \quad (7.419)$$

$$\tau = t \quad (7.420)$$

liefert

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (7.421)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (7.422)$$

Das transformierte P-DGL-System zur Beschreibung dreidimensionaler Plasmawellen lautet schließlich

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{2v_g}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\gamma_g^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) \mathbf{a} = k_P^2 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla' \varphi + k_P^2 \tilde{n} \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{\gamma} \quad (7.423)$$

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \varphi = k_P^2 (\tilde{n} - 1) \quad (7.424)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial}{\partial \xi}\right) n = -\nabla' (n \mathbf{v}) \quad (7.425)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{v} \cdot \nabla'\right) \tilde{\mathbf{p}} = c \nabla' \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \mathbf{a} - \dots \quad (7.426)$$

$$\dots - \mathbf{v} \times (\nabla' \times \mathbf{a}) \quad (7.427)$$

wobei

$$\gamma_g \equiv (1 - \beta_g)^{-1/2} \quad (7.428)$$

$$\beta_g \equiv \frac{v_g}{c} \quad (7.429)$$

und

$$\nabla' \equiv \begin{pmatrix} \nabla_{\perp} \\ \partial/\partial \xi \end{pmatrix} \quad (7.430)$$

7.13.2 Approximation

Zur Vereinfachung dieses komplizierten P-DGL-Systems kann man folgende Näherungen machen:

- $\nabla' \varphi \simeq 0$ in (7.423)
- $\Delta_{\perp} \simeq 0, \nabla_{\perp} \simeq 0$ in (7.423), (7.424), (7.425) und (7.426)
- QSA (Quasi-Static Approximation), $\partial/\partial\tau \simeq 0$ in (7.424), (7.425) und (7.426)
- 1-D-Approximation, longitudinal in (7.425) und (7.426), transversal in (7.423)

In dieser Näherung ergibt sich das vereinfachte P-DGL-System

$$\left(\frac{2v_g}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\gamma_g^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \mathbf{a} = k_P^2 \tilde{n} \frac{\mathbf{a}}{\gamma} \quad (7.431)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = k_P^2 (\tilde{n} - 1) \quad (7.432)$$

$$-v_g \frac{\partial n}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (n v_z) = 0 \quad (7.433)$$

$$\left(-v_g \frac{\partial}{\partial \xi} + v_z \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \tilde{p}_z = c \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - v_x \frac{\partial a_x}{\partial \xi} \quad (7.434)$$

Verwendet man die normierten Geschwindigkeiten (7.400) und (7.429) und setzt (7.402) sowie (7.404) in (7.434) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [n (\beta_z - \beta_g)] = 0 \quad (7.435)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [\gamma (1 - \beta_g \beta_z) - \varphi] = 0 \quad (7.436)$$

Integration dieser Gleichungen mit den Anfangsbedingungen

$$n(0) \doteq n_0 \quad (7.437)$$

$$\beta_z(0) \doteq 0 \quad (7.438)$$

$$\varphi(0) \doteq 0 \quad (7.439)$$

liefert das Gleichungssystem

$$n(\beta_z - \beta_g) = n_0 \beta_g \quad (7.440)$$

$$\gamma(1 - \beta_g \beta_z) - \varphi = 1 \quad (7.441)$$

mit den Lösungen

$$\tilde{n} = \gamma_g^2 \beta_g \left[(1 - \gamma_g^{-2} \psi^{-2})^{-1/2} - \beta_g \right] \quad (7.442)$$

$$\beta_z = \frac{\beta_g - (1 - \gamma_g^{-2} \psi^{-2})^{1/2}}{1 - \beta_g (1 - \gamma_g^{-2} \psi^{-2})^{1/2}} \quad (7.443)$$

wobei

$$\psi^2 \equiv \frac{(1 + \varphi)^2}{1 + a^2} \quad (7.444)$$

Aus (7.431) und (7.432) ergibt sich schließlich das approximierte gekoppelte P-DGL-System

$$\left(\frac{2\beta_g}{c} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\gamma_g^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \mathbf{a} = \frac{k_P^2}{1 + \varphi} \left(1 + \frac{1}{k_P^2 \gamma_g^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) \mathbf{a} \quad (7.445)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = k_P^2 \gamma_g^2 \left[\frac{\beta_g}{\sqrt{1 - \frac{1+a^2}{\gamma_g^2 (1+\varphi)^2}}} - 1 \right] \quad (7.446)$$

7.13.3 Numerische Lösung

In der QSA läßt sich das gekoppelte P-DGL-System iterativ lösen. Schreibt man einen gaußförmigen Laserpuls

$$a(z, t) = a_0 \exp \left[- \left(\frac{t - z/v_g}{\tau_{G0}} \right)^2 \right] \quad (7.447)$$

auf die dimensionslosen Variablen

$$\chi \equiv k_P v_g (t - z/v_g) \quad (7.448)$$

$$\sigma \equiv k_P v_g \tau_{G0} \quad (7.449)$$

um, so ergibt sich

$$a(\chi) = a_0 \exp \left[- \left(\frac{\chi}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (7.450)$$

Mit der Beziehung

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = k_p^2 \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \quad (7.451)$$

lautet die Poissongleichung schließlich

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi^2} = \gamma_g^2 \left[\frac{\beta_g}{\sqrt{1 - \frac{1+a^2}{\gamma_g^2(1+\varphi)^2}}} - 1 \right] \quad (7.452)$$

wobei

$$\beta_g \equiv \sqrt{1 - \gamma_g^{-2}} \quad (7.453)$$

Löst man (7.452) numerisch, so erhält man das Potential sowie die z-Komponente des elektrischen Feldes

$$\varphi(\chi) \Rightarrow E_z(\chi) = - \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} \quad (7.454)$$

Die Elektronendichteveriation berechnet man über

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{n - n_0}{n_0} = \tilde{n} - 1 \quad (7.455)$$

D. h. Ein Laserpuls, der sich durch ein Plasma bewegt, kann er über sein zeitliches Profil

$$a(\chi) = a_0 \exp \left[- \left(\frac{\chi}{\sigma} \right)^2 \right]$$

und der damit verbundenen ponderomotorischen Kraft eine Plasmawelle anregen. Die dimensionslosen Parameter lauten $\chi = k_p v_g (t - z/v_g)$ und $\sigma = k_p v_g \tau_{g0}$, wobei $k_p = \omega_p/c$ die Wellenzahl des Plasmas ist. Es entsteht eine Dichteoszillation (Wake-Field), die mit einem longitudinalen elektrischen Feld verbunden ist. Ab einer bestimmten Feldstärke wird die Oszillationsamplitude so hoch, daß die Plasmawelle bricht. Die Elektronen surfen auf der brechenden Plasmawelle und werden in longitudinale Richtung beschleunigt. Das

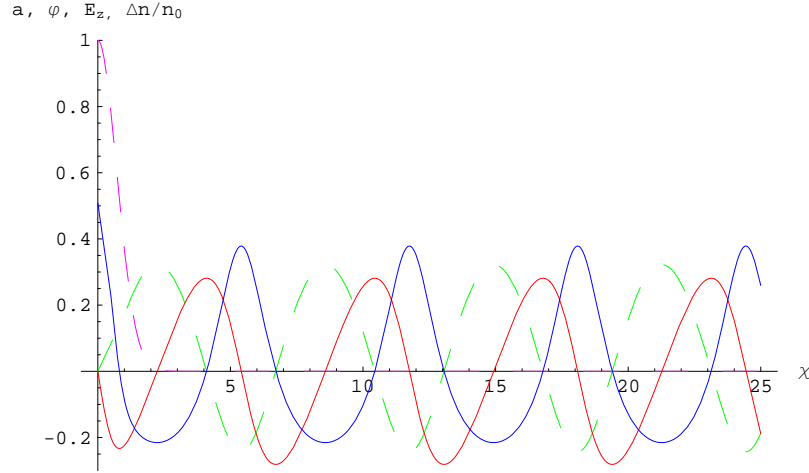


Abbildung 7.18: Laserpuls (violett), Potential der Plasmawelle (grün), longitudinale Komponente des elektrischen Feldes (rot) und Elektronendichteveränderung (blau) für $a_0 = 1$ für die Parameter $\gamma_g = 10$; $\sigma = 1$.

Potential ist durch die Poissongleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi^2} = \gamma_g^2 \left[\frac{\sqrt{1 - \gamma_g^{-2}}}{\sqrt{1 - \frac{1+a^2}{\gamma_g^2(1+\varphi)^2}}} - 1 \right]$$

gegeben. Das Potential liefert das longitudinale elektrische Feld $E_z(\chi) = -\partial\varphi/\partial\chi$. Die Elektronendichteveränderung kann man über $\Delta n/n_0 = (n - n_0)/n_0 = \tilde{n} - 1$ berechnen, wobei

$$\tilde{n} = \gamma_g^2 \beta_g \left[(1 - \gamma_g^{-2} \psi^{-2})^{-1/2} - \beta_g \right]$$

ist. Die Abbildungen (7.18, 7.19) zeigt das Potential der lasergetriebenen Plasmawelle für zwei verschiedene Intensitäten. Sowohl die Amplitude als auch die Periode der Plasmawelle werden bei höherer Intensität größer. Die Abbildungen (7.18) und (7.19) zeigen das longitudinale elektrische Feld und die Elektronendichteveränderung für verschiedene Intensitäten. Für höhere Intensitäten verläuft das longitudinale elektrische Feld stufenförmig bis schließlich Wellenbrechen (Wave-Breaking) einsetzt. Die Elektronen können in longitudinale Richtung beschleunigt werden.

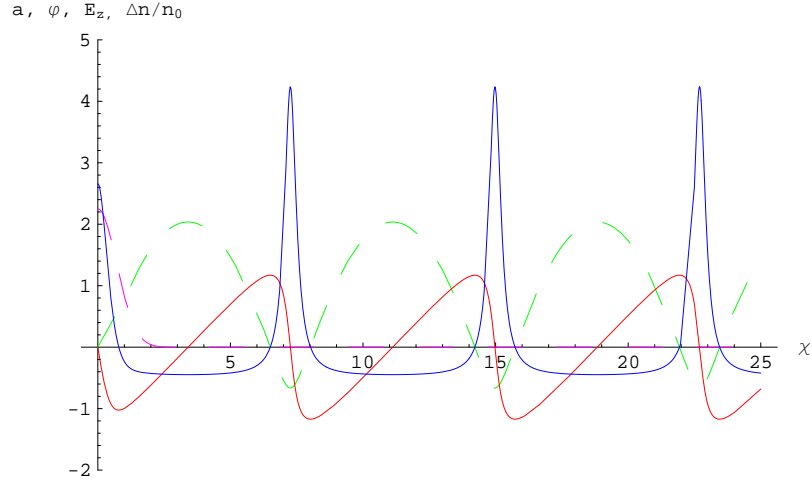


Abbildung 7.19: Laserpuls (violett), Potential der Plasmawelle (grün), longitudinale Komponente des elektrischen Feldes (rot) und Elektronendichteveränderung (blau) für $a_0 = 1.5$ für die Parameter $\gamma_g = 10$; $\sigma = 1$.

7.14 Relativistische Bewegungsgleichungen

Stellt man (7.23) folgendermaßen um

$$\mathbf{p}^2 = (mc)^2 (\gamma^2 - 1) \quad (7.456)$$

berechnet davon die zeitliche Ableitung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^2 = 2\mathbf{p} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (7.457)$$

und setzt (7.20) ein, so erhält man

$$\frac{d}{dt} (\gamma mc)^2 = 2\mathbf{p} [-e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (7.458)$$

$$\Leftrightarrow (mc)^2 \gamma \frac{d\gamma}{dt} = -e\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} - e\mathbf{p} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.459)$$

$$= -e\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} - e\mathbf{B} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{v}) \quad (7.460)$$

Da der Impuls nach (7.22) parallel zur Geschwindigkeit ist, entfällt der zweite Summand, und es ergibt sich für die Leistungsbilanz

$$(mc)^2 \gamma \frac{d\gamma}{dt} = -e\gamma m\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (7.461)$$

$$\Leftrightarrow mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (7.462)$$

7.15 Lösung der paraxialen Wellengleichung

Führt man den radialen Abstand

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (7.463)$$

ein, so erhält man für die Amplitude

$$\bar{A}(x, y, z) = \bar{A}(r, z) \quad (7.464)$$

Bildet man die erste und zweite Ableitung der Amplitude nach x

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \frac{x}{r} \quad (7.465)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r}\right) \quad (7.466)$$

$$= \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \left[\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right] \quad (7.467)$$

so folgt

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} \frac{(x^2 + y^2)}{r^2} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \left[\frac{2}{r} - \frac{(x^2 + y^2)}{r^3}\right] \quad (7.468)$$

$$= \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right] \quad (7.469)$$

$$= \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \quad (7.470)$$

Nach dieser Transformation lautet die paraxiale Wellengleichung (7.198)

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} \pm i \frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \right) = 0 \quad (7.471)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Wählt man eine gaußförmige Amplitude

$$\bar{A}(r, z) = \frac{E_0 W_0}{W} \exp \left(-\frac{r^2}{W^2} - \frac{ikr^2}{2R} + i\varphi \right) \quad (7.472)$$

mit den Randbedingungen

$$W(0) \doteq W_0 \quad (7.473)$$

$$R(0) \doteq \infty \quad (7.474)$$

$$g \equiv 1/R \quad (7.475)$$

$$\Rightarrow g(0) \doteq 0 \quad (7.476)$$

$$\varphi(0) \doteq 0 \quad (7.477)$$

so ergibt sich im Fokus

$$\bar{A}(r, 0) = E_0 \exp \left(-\frac{r^2}{W_0^2} \right) \quad (7.478)$$

Die Ableitung nach z ergibt

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} = -\frac{E_0 W_0}{W^2} \frac{dW}{dz} \exp(\dots) + \frac{E_0 W_0}{W} \exp(\dots) \left[\frac{2r^2}{W^3} \frac{dW}{dz} - \frac{ikr^2}{2} \frac{dg}{dz} + i \frac{d\varphi}{dz} \right] \quad (7.479)$$

Mit der Ableitung nach r

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial r} = \frac{E_0 W_0}{W} \exp(\dots) \left[-\frac{2r}{W^2} - igkr \right] \quad (7.480)$$

und der zweiten Ableitung

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} = \frac{E_0 W_0}{W} \exp(\dots) \left[-\frac{2}{W^2} - igk + r^2 \left(\frac{2}{W^2} + igk \right)^2 \right] \quad (7.481)$$

folgt

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} = \frac{E_0 W_0}{W} \exp(\dots) \left[-2 \left(\frac{2}{W^2} + igk \right) + r^2 \left(\frac{2}{W^2} + igk \right)^2 \right] \quad (7.482)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Setzt man dies in (7.471) ein, so ergibt sich

$$-\frac{1}{W} \frac{dW}{dz} \mp i \frac{d\varphi}{dz} - \frac{i}{k} \left(\frac{2}{W^2} + igk \right) = 0 \quad (7.483)$$

$$\frac{2}{W^2} \frac{dW}{dz} - \frac{ik}{2} \frac{dg}{dz} \pm i \frac{1}{2k} \left(\frac{2}{W^2} + igk \right)^2 = 0 \quad (7.484)$$

und unter Berücksichtigung von Real- und Imaginärteil

$$g = \pm \frac{1}{W} \frac{dW}{dz} \quad (7.485)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \pm \frac{2}{kW^2} \quad (7.486)$$

$$\frac{dW}{dz} = \pm gW \quad (7.487)$$

$$\frac{dg}{dz} = \pm \left(\frac{4}{k^2 W^4} - g^2 \right) \quad (7.488)$$

Quadriert man (7.485)

$$g^2 = \frac{1}{W^2} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \quad (7.489)$$

und setzt dies und die Ableitung

$$\frac{dg}{dz} = \mp \frac{1}{W^2} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \pm \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{dz^2} \quad (7.490)$$

in (7.488) ein, so erhält man

$$\frac{d^2 W}{dz^2} = \frac{4}{k^2 W^3} \quad (7.491)$$

Die Lösung dieser DGL lautet

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} \quad (7.492)$$

wobei

$$z_0 \equiv \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \quad (7.493)$$

Setzt man dies in (7.485) ein, so ergibt sich

$$g(z) = \pm \frac{1}{z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right)} \quad (7.494)$$

und damit

$$R(z) = \pm z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right) \quad (7.495)$$

Integration von (7.486) liefert

$$\varphi(z) = \pm \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (7.496)$$

Mit (7.189) und (7.191) ergibt sich schließlich

$$E^\pm(r, t) = \bar{A}(r, z) \exp[i(\omega t \mp kz)] \quad (7.497)$$

wobei

$$\bar{A}(r, z) = \frac{E_0 W_0}{W} \exp \left(-\frac{r^2}{W^2} \mp \frac{ikr^2}{2|R|} \pm i|\varphi| \right) \quad (7.498)$$

7.16 Lösung der parabolischen Wellengleichung

Die allgemeine Definition für eine eindimensionale Fouriertransformation lautet

$$\mathcal{F}[f(t)] \equiv \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(ib\omega t) dt \quad (7.499)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \equiv \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(-ib\omega t) d\omega \quad (7.500)$$

wobei in allen weiteren Formeln

$$(a, b) \rightarrow (-1, 1) \quad (7.501)$$

verwendet wird. Die Fouriertransformation des Ortsfrequenzspektrums liefert

$$u(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{F}[U(\alpha, \beta, z)] \quad (7.502)$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta, \omega, z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \quad (7.503)$$

wobei

$$\alpha \equiv k_x, \beta \equiv k_y, \gamma \equiv k_z \quad (7.504)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Inverse Fouriertransformation von (7.503) liefert schließlich das Feld

$$u(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}^{-1}[u(\mathbf{r}, \omega)] \quad (7.505)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta, \omega, z) \exp[-i(\alpha x + \beta y - \omega t)] d\alpha d\beta d\omega \quad (7.506)$$

Setzt man dies in (7.258) ein, so folgt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(\omega) - \alpha^2 - \beta^2 \right) U(\alpha, \beta, \omega, z) = 0 \quad (7.507)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2(\alpha, \beta, \omega) \right) U(\alpha, \beta, \omega, z) = 0 \quad (7.508)$$

mit der Lösung

$$U^{\pm}(\alpha, \beta, \omega, z) = \exp[\mp i\gamma(\alpha, \beta, \omega)z] U_0(\alpha, \beta, \omega) \quad (7.509)$$

Die Übertragungsfunktion ist über

$$U^{\pm}(\alpha, \beta, \omega, z) = H^{\pm}(\alpha, \beta, \omega, z) U_0(\alpha, \beta, \omega) \quad (7.510)$$

definiert. Es gilt also

$$H^{\pm}(\alpha, \beta, \omega, z) \equiv \exp[\mp i\gamma(\alpha, \beta, \omega)z] \quad (7.511)$$

In Fresnelscher Näherung

$$k^2(\omega) \gg \alpha^2 + \beta^2 \quad (7.512)$$

kann man den Parameter

$$\gamma(\alpha, \beta, \omega) = \sqrt{k^2(\omega) - \alpha^2 - \beta^2} \quad (7.513)$$

in eine Potenzreihe

$$\gamma \approx k(\omega) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k(\omega)} \quad (7.514)$$

entwickeln. Die Übertragungsfunktion für Pulse in Fresnelscher Näherung lautet somit

$$H_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \omega, z) = \exp[\mp ik(\omega)z] \exp\left[\pm i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k(\omega)} z\right] \quad (7.515)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Entwickelt man die Wellenzahl in eine Taylorreihe

$$k(\omega) = k(\omega)|_{\omega_0} + \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \mathcal{O}^3(\omega) \quad (7.516)$$

$$= k_0 + v_g^{-1} \bar{\omega} + \frac{1}{2} D \bar{\omega}^2 + \mathcal{O}^3(\omega) \quad (7.517)$$

wobei

$$\bar{\omega} \equiv \omega - \omega_0 \quad (7.518)$$

$$k_0 \equiv k(\omega)|_{\omega_0} \quad (7.519)$$

$$v_g^{-1} \equiv \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \quad (7.520)$$

$$D \equiv \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} \quad (7.521)$$

und setzt dies in (7.515) ein, so ergibt sich

$$H_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \omega, z) = \exp(\mp i k_0 z) \bar{H}^{\pm}(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) \quad (7.522)$$

wobei

$$\bar{H}_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) \equiv \exp \left[i z \left(\mp \frac{\bar{\omega}}{v_g} \mp \frac{D}{2} \bar{\omega}^2 \pm \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k_0} \right) \right] \quad (7.523)$$

Setzt man

$$U^{\pm}(\alpha, \beta, \omega, z) \approx \exp(\mp i k_0 z) \bar{H}_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) U_0(\alpha, \beta, \omega) \quad (7.524)$$

in (7.503) ein, so lautet das Feld

$$u^{\pm}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} U^{\pm}(\alpha, \beta, \omega, z) \exp[-i(\alpha x + \beta y - \omega t)] d\alpha d\beta d\omega \quad (7.525)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) U_0(\alpha, \beta, \omega) \exp[-i(\alpha x + \beta y - \bar{\omega} t)] d\alpha d\beta d\bar{\omega} \times \dots \\ \dots \times \exp[i(\omega_0 t \mp k_0 z)] \quad (7.526)$$

Definiert man die langsam variierende Amplitude über

$$u^{\pm}(\mathbf{r}, t) = v^{\pm}(\mathbf{r}, t) \exp[i(\omega_0 t \mp k_0 z)] \quad (7.527)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

und ersetzt das Spektrum des Anfangsfeldes $U_0(\alpha, \beta, \omega)$ durch das langsam variierende Spektrum $V_0(\alpha, \beta, \bar{\omega})$, so ergibt sich

$$v^\pm(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{FP}^\pm(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) V_0(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \times \dots \times \exp[-i(\alpha x + \beta y - \bar{\omega} t)] d\alpha d\beta d\bar{\omega} \quad (7.528)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_{FP}^\pm(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) V_0(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \times \dots \times \exp[-i(\alpha x + \beta y - \bar{\omega} \eta^\pm)] d\alpha d\beta d\bar{\omega} \quad (7.529)$$

wobei

$$\eta^\pm \equiv t \mp \frac{z}{v_g} \quad (7.530)$$

und

$$\tilde{H}_{FP}^\pm(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) \equiv \bar{H}_{FP}^\pm(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) \exp\left(\pm i \bar{\omega} \frac{z}{v_g}\right) \quad (7.531)$$

Für die langsam variierende Amplitude in dem transformierten System, daß sich mit der Gruppengeschwindigkeit v_g bewegt, erhält man schließlich

$$v^\pm(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} V_0(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \exp\left[i \frac{z}{2} \left(\mp D \bar{\omega}^2 \pm \frac{\alpha^2 + \beta^2}{k_0}\right)\right] \times \dots \times \exp[-i(\alpha x + \beta y - \bar{\omega} \eta^\pm)] d\alpha d\beta d\bar{\omega} \quad (7.532)$$

Daraus ergibt sich das Spektrum der langsam variierenden Amplitude

$$V(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) = \frac{1}{2\pi} V_0(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \exp\left[i \frac{z}{2} \left(\mp D \bar{\omega}^2 \pm \frac{\alpha^2 + \beta^2}{k_0}\right)\right] \quad (7.533)$$

Differenziation ergibt

$$i \frac{\partial V(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z)}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left(\mp D \bar{\omega}^2 \pm \frac{\alpha^2 + \beta^2}{k_0}\right) V(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) \quad (7.534)$$

und Fouriertransformation liefert

$$\left(i \frac{\partial}{\partial z} \pm \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \mp \frac{1}{2k_0} \Delta^{(2d)}\right) v(\mathbf{r}, \eta) = 0 \quad (7.535)$$

Vernachlässigt man in (7.534) die transversalen Ortsfrequenzen, so folgt

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \pm i \frac{D}{2} \bar{\omega}^2\right) V(\bar{\omega}, z) = 0 \quad (7.536)$$

7 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Vernachlässigt man in (7.535) die transversale Richtungsabhängigkeit, so ergibt sich schließlich die parabolische Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \mp i \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) v(\eta, z) = 0 \quad (7.537)$$

Die Lösung von (7.536) lautet

$$V^\pm(\bar{\omega}, z) = V_0 \exp \left(\mp i \frac{D}{2} \bar{\omega}^2 z \right) \quad (7.538)$$

wobei

$$V_0 \equiv V(\bar{\omega}, z = 0) \quad (7.539)$$

Für die zeitliche Einhüllende eines Gaußpulses mit linearem Chirp gilt

$$v(t) = v_0 \exp \left[- (1 + ia) \right] \left(\frac{t}{\tau_{G0}} \right)^2 \quad (7.540)$$

mit der Pulsdauer

$$\tau_P = \sqrt{2 \ln 2} \tau_{G0} \quad (7.541)$$

Die Fouriertransformierte von (7.540) lautet

$$V(\bar{\omega}) = \frac{v_0 \sqrt{\pi} \tau_{G0}}{(1 + a^2)^{1/4}} \exp \left[i \Phi - \frac{\bar{\omega}^2 \tau_{G0}^2}{4(1 + a^2)} \right] \quad (7.542)$$

wobei

$$\Phi(\bar{\omega}) \equiv -\frac{1}{2} \arctan(a) + \frac{a \tau_{G0}^2}{4(1 + a^2)} \bar{\omega}^2 \quad (7.543)$$

Setzt man (7.542) in (7.538) ein, so erhält man das z -abhängige Spektrum

$$V^\pm(\bar{\omega}, z) = A_0 \exp(-x \bar{\omega}^2) \exp[i y^\pm(z) \bar{\omega}^2] \quad (7.544)$$

wobei

$$x \equiv \frac{\tau_{G0}^2}{4(1 + a^2)} \quad (7.545)$$

$$y^\pm(z) \equiv \frac{a \tau_{G0}^2}{4(1 + a^2)} \mp \frac{D}{2} z \quad (7.546)$$

$$A_0 \equiv \frac{v_0 \sqrt{\pi} \tau_{G0}}{(1 + a^2)^{1/4}} \exp \left[-\frac{i}{2} \arctan(a) \right] \quad (7.547)$$

Die inverse Fouriertransformation von (7.544) liefert

$$v^{\pm}(\eta^{\pm}, z) = v_0 \exp \left[- \left(1 + i \frac{y^{\pm}(z)}{x} \right) \left(\frac{\eta^{\pm}}{\tau_G^{\pm}(z)} \right)^2 \right] \quad (7.548)$$

Referenzen zu dem theoretischen Anhang

Kap. 7.1, 7.2	[20, 18, 41, 19, 42]
Kap. 7.3, 7.4, 7.5	[43, 26, 2, 41]
Kap. 7.6, 7.7, 7.9, 7.10, 7.15, 7.16	[24, 44, 25, 45, 46, 47]
Kap. 7.8, 7.11	[38, 37]
Kap. 7.12	[21, 48]
Kap. 7.13	[49, 18, 23, 33, 50, 51, 52]